



Министерство науки и образования Российской Федерации

**Федеральное агентство по образованию**

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

**САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**НЕФТЕТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

---

Доцент, к.т.н.

В.А. Ольховская

## **ПОДЗЕМНАЯ ГИДРОМЕХАНИКА**

**САМАРА – 2004**

## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр
1. <b>ВВЕДЕНИЕ В ДИСЦИПЛИНУ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ ФИЛЬТРАЦИИ НЕФТИ, ГАЗА И ВОДЫ</b> .....	6
1.1. Предмет и задачи подземной гидромеханики. Этапы развития науки .....	6
1.2. Элементы строения залежи .....	10
1.3. Классификация режимов работы залежей .....	12
1.4. Особенности фильтрации. Характеристики пористой среды .	13
1.5. Обобщенный теоретический закон фильтрации.....	17
1.6. Линейный закон фильтрации (закон Дарси).....	19
1.7. Приведенное давление .....	20
1.8. Границы применимости закона Дарси .....	23
1.9. Нелинейные законы фильтрации .....	23
1.10. Обобщенный закон Дарси .....	25
2. <b>ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ПЛАСТОВЫХ ФЛЮИДОВ</b> .....	26
2.1. Вводные замечания.....	26
2.2. Вывод уравнения неразрывности фильтрационного потока для однородного сжимаемого флюида в деформируемой пористой среде.....	28
2.3. Дифференциальные уравнения движения. Основное уравнение фильтрации. Закон Дарси для анизотропных сред.....	30
2.4. Уравнения состояния.....	32
2.5. Начальные и граничные условия.....	33
3. <b>ОДНОМЕРНЫЕ УСТАНОВИВШИЕСЯ ПОТОКИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ</b>	35
3.1. Типы фильтрационных потоков.....	35
3.2. Сравнительная характеристика потоков.....	37
3.3. Фильтрация жидкости в неоднородных пластах.....	40
3.4. Одномерные фильтрационные потоки несжимаемой жидкости при нелинейных законах фильтрации .....	43

4.	<b>ПЛОСКИЕ УСТАНОВИВШИЕСЯ ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ПОТОКИ. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СКВАЖИН</b> .....	47
4.1.	Потенциал скорости фильтрации.....	47
4.2.	Точечный источник и сток.....	48
4.3.	Принцип суперпозиции.....	49
4.4.	Приток жидкости к группе скважин в пласте с удаленным контуром питания.....	50
4.5.	Приток жидкости к скважине в пласте с прямолинейным контуром питания.....	52
4.6.	Приток жидкости к прямолинейным цепочкам и кольцевым батареям скважин. ЭГДА. Метод эквивалентных фильтрационных сопротивлений.....	53
5.	<b>ПРИТОК К НЕСОВЕРШЕННЫМ СКВАЖИНАМ</b> .....	58
5.1.	Виды гидродинамического несовершенства скважин .....	58
5.2.	Формулы притока жидкости к несовершенным Скважинам .....	59
5.3.	Несовершенство по качеству вскрытия.....	62
6.	<b>НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ В УПРУГОЙ (ДЕФОРМИРУЕМОЙ) ПОРИСТОЙ СРЕДЕ</b> .....	63
6.1.	Упругий режим пласта и его особенности.....	63
6.2.	Подсчет упругого запаса жидкости в пласте.....	64
6.3.	Дифференциальное уравнение фильтрации упругой жидкости в упругой среде .....	65
6.4.	Прямолинейно-параллельный фильтрационный поток упругой жидкости .....	67
6.5.	Плоскорадиальный фильтрационный поток упругой жидкости. Основная формула теории упругого режима .....	69
6.6.	Интерференция скважин в условиях упругого режима .....	71
6.7.	Приближенные методы решения задач теории упругого режима.....	72
6.8.	Определение коллекторских свойств пласта по данным исследования скважин на неустановившемся режиме .....	78
7.	<b>ОДНОМЕРНЫЕ УСТАНОВИВШИЕСЯ ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ПОТОКИ ГАЗА</b> .....	81

7.1.	Дифференциальные уравнения фильтрации газа по линейному закону .....	81
7.2.	Аналогия между фильтрацией жидкости и идеального газа ..	83
7.3.	Сравнительный анализ прямолинейно-параллельного и плоскорадиального фильтрационных потоков идеального газа.....	84
7.4.	Плоскорадиальный фильтрационный поток идеального газа по двучленному закону фильтрации.....	87
7.5.	Плоскорадиальный фильтрационный поток реального газа	88
8.	<b>НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ГАЗА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ .....</b>	91
8.1.	Дифференциальное уравнение Лейбензона.....	91
8.2.	Линеаризация уравнения Лейбензона и его основное решение .....	93
8.3.	Решение задачи о притоке газа к скважине методом последовательной смены стационарных состояний .....	96
8.4.	Принцип суперпозиции в задачах неустановившейся фильтрации газа.....	97
8.5.	Отбор газа из замкнутого пласта .....	99
9.	<b>ПОРШНЕВОЕ ВЫТЕСНЕНИЕ НЕФТИ ВОДОЙ. ДВИЖЕНИЕ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ПРИ ВЗАИМНОМ ВЫТЕСНЕНИИ ЖИДКОСТЕЙ .....</b>	103
9.1.	Кинематические условия на подвижной границе раздела при взаимном вытеснении жидкостей.....	103
9.2.	Прямолинейно-параллельное и плоскорадиальное поршневое вытеснение нефти водой .....	104
9.3.	Сравнительная характеристика потоков.....	106
9.4.	Устойчивость движения границы раздела двух жидкостей ...	107
9.5.	Конусообразование. Предельный безводный дебит скважины .....	109
10.	<b>Основы теории непоршневого вытеснения нефти водой .....</b>	114
10.1.	Уравнение неразрывности двухфазного течения.....	114
10.2.	Расчет показателей разработки на основе решения Бэкли-Левверетта.....	118
10.3.	Модель вытеснения Рапопорта-Лиса.....	119
10.4.	Модифицированные относительные проницаемости .....	122

7.11.	Установившаяся фильтрация газированной жидкости .....	125
11.1.	Газовый фактор .....	126
11.2.	Функция Христиановича.....	128
11.3.	Алгоритм нахождения функции Христиановича по методу Б.Б.Лапука .....	129
11.4.	Упрощенные способы определения функции Христиановича	130
7.12.	Гидродинамические основы моделирования процессов увеличения нефтеотдачи пластов .....	132
12.1.	Механизм химических методов увеличения нефтеотдачи .....	132
12.2.	Дифференциальные уравнения двухфазной фильтрации в присутствии активной примеси .....	133
12.3.	Движение скачков насыщенности и концентрации.....	135
12.4.	Анализ построений.....	138
13.	<b>ОСНОВЫ ТЕОРИИ СОВМЕСТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ НЕФТИ, ВОДЫ И ГАЗА</b> .....	140
13.1.	Обобщенный закон Дарси для трехфазной фильтрации .....	140
13.2.	Дифференциальные уравнения трехфазной фильтрации. Модель Маскета-Миреса .....	142
13.3.	Фильтрация многокомпонентных смесей с учетом фазовых превращений .....	144
	Литература	148

# 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ ФИЛЬТРАЦИИ НЕФТИ, ГАЗА И ВОДЫ

## 1.1. Предмет и задачи подземной гидромеханики. Этапы развития науки.

**Подземная гидромеханика** - это наука о движении нефти, воды, газа и их смесей в пористых и трещиновато-пористых горных породах, слагающих продуктивные пласты и массивы.

Основу подземной гидромеханики составляет **теория фильтрации**, а сама наука является теоретической основой разработки нефтяных, газовых и газоконденсатных месторождений.

### ***Назначение и сущность гидродинамических методов моделирования фильтрационных процессов***

Разработка залежи - это вызов процесса движения пластовых жидкостей и управление его дальнейшим течением с помощью скважин.

Система разработки залежи должна обеспечивать:

- а) заданный уровень добычи нефти;
- б) минимум затрат;
- в) возможно более полное извлечение нефти из недр.

Такая система является **рациональной**.

Установить рациональную систему разработки можно только путем анализа большой совокупности схем и вариантов разработки, сравнивая показатели разработки при осуществлении различных вариантов. Для этого нужно как бы заставить данную залежь работать в различных технологических условиях. Решить эту задачу путем непосредственного промыслового эксперимента невозможно. С этой целью используют **гидродинамические расчеты и моделирование**, то есть рассчитывают показатели разработки с помощью тех или иных теоретических зависимостей. Далее в процессе технико-экономического анализа устанавливаются рациональная схема и наиболее выгодный вариант.

При проектировании систем разработки первостепенное значение имеют следующие вопросы:

- 1) определение оптимальных схем размещения добывающих и нагнетательных скважин и порядка ввода их в работу;
- 2) определение забойных давлений и дебитов скважин как добывающих, так и нагнетательных в различные моменты процесса разработки;
- 3) установление динамики текущей добычи нефти и обводнения залежи;
- 4) определение сроков работы отдельных групп скважин, а также полного срока разработки залежи;
- 5) выявление характерных особенностей продвижения границы раздела вода-нефть (нефть-газ).

Все эти вопросы решаются отдельно для каждого варианта разработки с помощью гидродинамических расчетных методов.

**Сущность гидродинамических методов** заключается в установлении количественной связи между поведением дебитов скважин и давлений на забоях этих скважин и на определенных контурах, скоростей и сроков перемещения отдельных частиц пластовой жидкости в зависимости от формы залежи, параметров пласта, физико-химических свойств нефти, воды, газа и их смесей, числа и взаимного расположения скважин. Расчетные формулы базируются на:

- основных **законах фильтрации** жидкостей в пористых и трещиновато-пористых средах;
- **законах взаимодействия отдельных скважин** в процессе их совместной работы.

Перед выполнением гидродинамических расчетов необходимо собрать возможно более полные и достоверные данные о залежи как объекте разработки. Эти данные должны охарактеризовать строение залежи, физические свойства пород и жидкостей, условия эксплуатации скважин, а также содержать сведения об окружающей залежь области. Однако на стадии проектирования учесть все детали геологического строения залежи невозможно, так как мы располагаем данными по ограниченному числу скважин. Продуктивные же пласты обычно имеют весьма сложную форму как в плане, так и по вертикальному разрезу, а такие основные параметры как толщина, проницаемость и пористость могут существенно изменяться по объему пласта. Поэтому для получения надежных результатов проектирования требуется предварительно создать модель разработки.

**Модель разработки** можно определить как систему взаимосвязанных количественных представлений о разработке залежи, которая состоит из ***модели пласта*** и ***модели процесса извлечения***. Обе модели всегда облечены в математическую форму, т.е. характеризуются определенными математическими соотношениями. Как любая другая математическая модель, они основаны на упрощении (идеализации) реального состояния или процесса, что позволяет создать расчетные схемы, учитывающие только основные эффекты.

***Классический подход*** к моделированию как раз и заключается в том, чтобы сформулировать исходную задачу, описывающую физический процесс, а затем постараться ввести необходимое количество упрощающих предположений для формулировки новой задачи, решение которой может быть получено в виде формулы. При этом значение функции может быть определено для каждого значения аргумента. В этом заключается сущность ***аналитических*** расчетных методов. Аналитические методы моделирования фильтрационных процессов составляют основу классической теории фильтрации (в отличие от численных, или разностных, методов, которые в настоящем курсе не рассматриваются).

Итак, после сбора, обработки и систематизации исходных данных реальные пласты идеализируются. В первую очередь необходимо построить

идеализированную расчетную схему залежи. Так как вертикальные размеры залежи обычно малы по сравнению с горизонтальными, то для этого:

1) заменяют действительную картину фильтрации ее проекцией на горизонтальную плоскость;

2) фактический постепенный переход от нефтенасыщенной части залежи к водоносной заменяют расчетным контуром нефтеносности с вертикальным ВНК;

3) полученную фигуру расчетного контура нефтеносности заменяют фигурой правильной геометрической формы: полосой, кругом, кольцом, сектором кольца или круга, сочетанием указанных простых форм.

Для построенной таким образом идеализированной расчетной схемы залежи принимается гипотеза об *однородности пласта* как по площади, так и по разрезу, либо используются модели *неоднородного пласта* (не путать с расчетной схемой, которая, в отличие от модели пласта, учитывает только его геометрическую форму). Реальное плоское течение аппроксимируется *квазиодномерным* (заменяется сочетанием простейших форм фильтрационных потоков). Также выбирается определенная *модель вытеснения (поршневое, непоршневое)*, после чего для той или иной схемы расстановки скважин рассчитываются средние показатели разработки.

В действительности благодаря сложности геологического строения залежи дебиты отдельных скважин и сроки их работы, а также продуктивность и сроки разработки отдельных участков залежи могут значительно отличаться от средних проектных. Это естественно, ибо проект не догма: по мере развития процесса разработки (по мере накопления новых фактических данных), а также по мере появления новых технических возможностей в него вносятся отдельные уточнения и коррективы. В основе получения новых проектных решений также лежат гидродинамические расчеты.

Подводя итог вышесказанному, можно, таким образом, отметить, что **основными задачами подземной гидромеханики** являются:

1) создание теории и методов расчета движения реальных жидкостей (газов) в пористых средах в процессе извлечения нефти или газа из недр;

2) получение данных, необходимых для научно обоснованного проектирования разработки месторождений углеводородного сырья.

### ***Этапы развития науки***

Начало развитию подземной гидромеханики было положено французским инженером А.Дарси, который в процессе работы над проектом водоснабжения г. Дижона провел многочисленные опыты по изучению фильтрации воды через вертикальные песчаные фильтры. В 1856 г. им была опубликована книга с описанием опытов. В ней же был сформулирован экспериментальный закон, в соответствии с которым скорость фильтрации жидкости прямо пропорциональна градиенту давления.



В эти же годы другой французский инженер Дюпюи опубликовал монографию, в которой впервые изложил гидравлическую теорию движения грунтовых вод.

Ч.Слихтер - гидрогеолог, работавший в США, - внес значительный вклад в развитие теории фильтрации. Им впервые были предложены модели идеального и фиктивного грунтов, показано, что пористость и просветность фиктивного грунта зависят не от диаметра частиц, а лишь от плотности их укладки.

Основоположниками **отечественной школы теории фильтрации** являются проф. Н.Е.Жуковский, академики Н.Н.Павловский и Л.С.Лейбензон.

Н.Е.Жуковский в 1889 г. опубликовал первую работу по теории фильтрации "Теоретическое исследование о движении подпочвенных вод". Им впервые были выведены общие дифференциальные уравнения теории фильтрации, указано на математическую аналогию теплопроводности и фильтрации. Им также решен ряд задач о притоке воды к скважинам.

Н.Н.Павловским многие задачи фильтрации воды были сформулированы как краевые задачи математической физики. Он же впервые обосновал и предложил применение метода ЭГДА для решения фильтрационных задач, что в последующем нашло широкое применение для решения задач фильтрации нефти, воды и газа в продуктивных пластах. Н.Н.Павловский впервые предложил использовать параметр Рейнольдса в качестве критерия существования закона Дарси.

Следует отметить, что вплоть до середины 20-х годов XX века подземная гидромеханика развивалась преимущественно в рамках инженерной гидрогеологии (отсюда название). В 20-х и начале 30-х годов этого века прогнозирование разработки нефтяных месторождений производилось в основном путем построения фактических зависимостей показателей разработки от времени, полученных в начальный период разработки, статистической обработки этих показателей и их экстраполяции на будущее. Математические методы теории фильтрации, уже значительно развитые к этому времени Н.Е.Жуковским, Н.Н.Павловским и другими, еще не нашли применения в нефтяном деле.

Развитию и использованию **в разработке нефтяных месторождений** методов этой теории существенным образом способствовали работы американского ученого Маскета.

**Основателем отечественной школы ученых и специалистов в области гидродинамической теории фильтрации нефти и газа является академик Л.С.Лейбензон.** Теоретические и экспериментальные исследования Л.С.Лейбензона начались в 1921 г. в Баку. Обобщение этих исследований приведено в монографии "Нефтепромысловая механика", в которой впервые изложены основы нефтегазовой подземной гидромеханики (1934 г.).

Выдающийся вклад в развитие теории фильтрации в нефтегазоводоносных пластах внесли С.А.Христианович, Б.Б.Лапук, И.А.Чарный, В.Н.Щелкачев и многие другие ученые.

Широкие исследования в области подземной гидромеханики ведутся за рубежом. Стали классическими экспериментальные исследования, проведенные в США еще в 30-е годы XX века Р.Викофом и Г.Ботсетом по изучению фазовых проницаемостей жидкости и газа. Существенное значение имеет классическая теория двухфазной фильтрации, предложенная С.Бакли и М.Леввереттом. Значительное влияние на развитие теории фильтрации оказала работа А.Ван-Эвердингена и У.Херста о притоке упругой жидкости к скважине.

В последние годы исследования в области подземной гидромеханики связаны с проблемой увеличения нефтеотдачи пластов. Новые актуальные задачи выдвигаются практикой разработки нефтяных и газовых месторождений, вступивших в позднюю стадию, а также таких, которые характеризуются сложными горно-геологическими и термобарическими условиями залегания и эксплуатации.

В связи с этим интенсивно развиваются:

- теория многофазной многокомпонентной фильтрации флюидов в деформируемых неоднородных пластах;
- физико-химическая гидродинамика и гидродинамика новых методов извлечения нефти и газа из недр;
- теория фильтрации неньютоновских жидкостей и углеводородных дисперсных систем;
- подземная гидротермодинамика;
- теория нелинейной нестационарной фильтрации и др.

Для решения современных гидродинамических задач применяют широко развитый аппарат математической физики, вероятностно-статистические методы, используют возможности вычислительной техники.

## 1.2. Элементы строения залежи

**Залежь нефти** - это промышленное локальное скопление нефти в пористом или трещиноватом пласте (коллекторе), ограниченном сверху и снизу непроницаемыми породами (обычно глинами), а с боков - напором контурных вод.

Схема строения залежи с газовой шапкой показана на рис. 1.1.

Поверхности контактов газа и нефти, воды и нефти называются поверхностями **газонефтяного (ГНК)** и **водонефтяного (ВНК) контактов**.

Линия пересечения поверхности ВНК (ГНК) с кровлей продуктивного пласта называется **внешним контуром** нефтеносности (газоносности); с подошвой пласта - **внутренним контуром** нефтеносности (газоносности).

**Нефтяной пласт** - это совокупность залежей нефти с прилегающей водонапорной областью.

По условиям залегания нефти, газа и воды можно выделить два основных типа нефтегазовых залежей:

- 1) залежь с краевой водой или с крыльевой нефтяной оторочкой (см. рис. 1.1);
- 2) залежь с подошвенной водой или со сводовой нефтяной оторочкой (рис. 1.2).

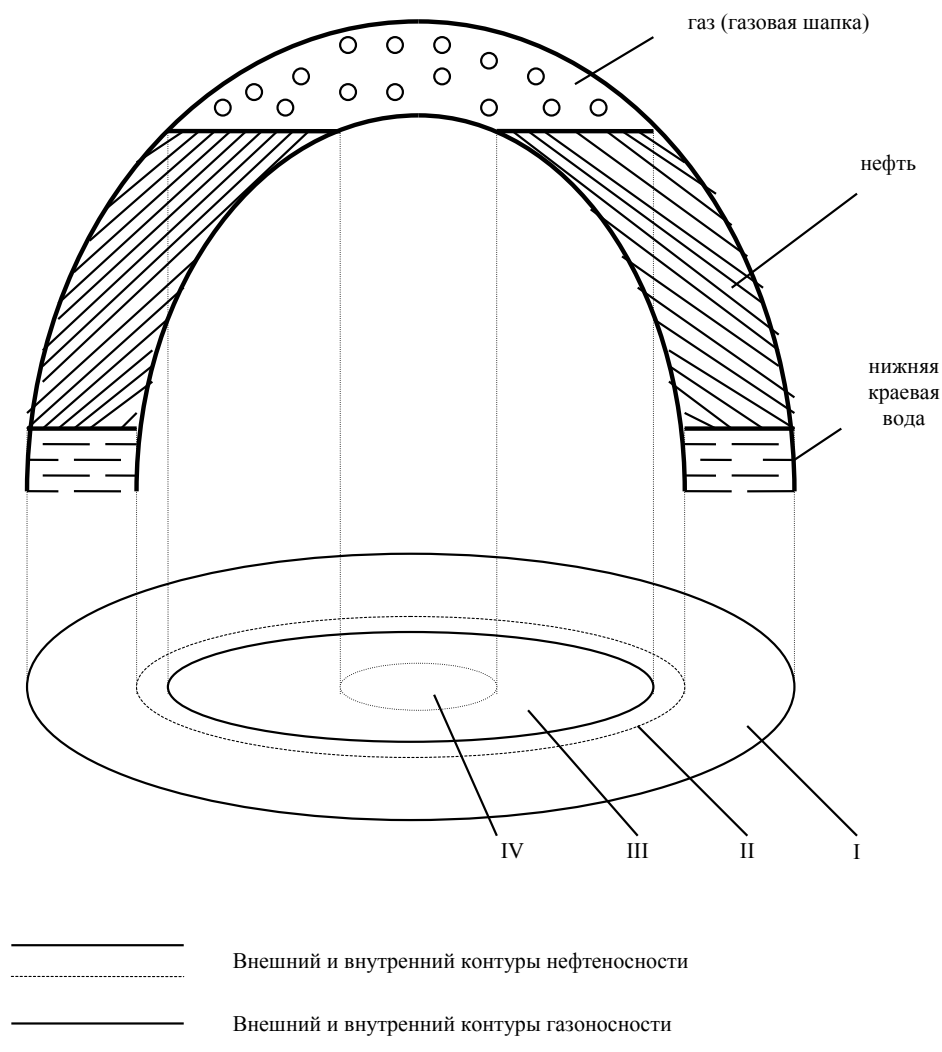


Рис. 1.1. Схема строения залежи нефти с газовой шапкой

В залежах первого типа выделяются два контура нефтеносности и два контура газоносности (внешний и внутренний), между которыми размещаются водонефтяная I, нефтяная II, газонефтяная III и газовая IV зоны.

В залежах второго типа по всей площади залежи вода подстилает нефть, которая, в свою очередь, подстилает газовую шапку. Для них характерны всего

два внешних контура: газо- и нефтеносности, оконтуривающих водонефтяную и газоводонефтяную зоны.

По положению в пласте можно выделить два основных типа пластовых вод: краевую и подошвенную.

**Краевая вода** находится в том же пласте, что и залежь, либо покрывая ее сверху (верхняя краевая), либо подпирая снизу (нижняя краевая).

**Подошвенная** - часть краевой воды, находящаяся в нефтяном (газовом) пласте непосредственно под залежью, в пределах внешнего контура нефтеносности (газоносности).

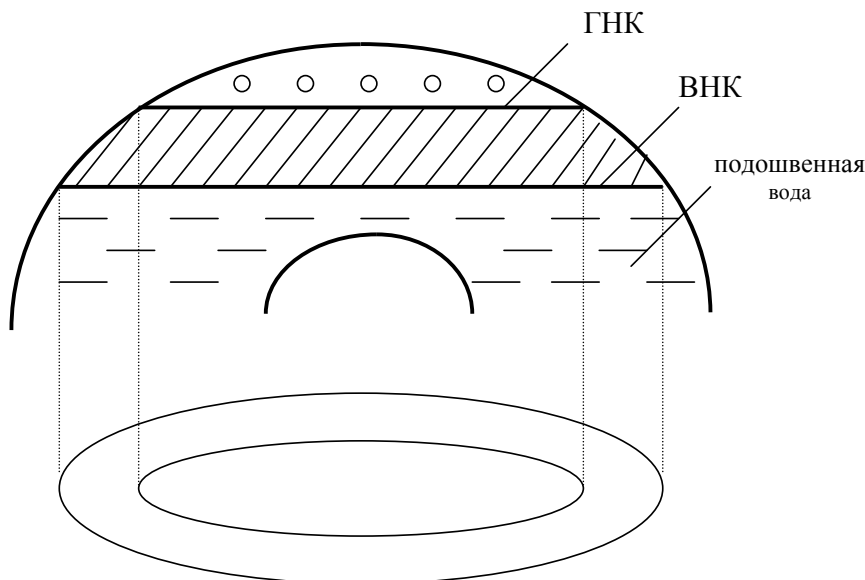


Рис. 1.2. Схема залежи нефти с подошвенной водой и газовой шапкой

### 1.3. Классификация режимов работы залежей

Постановка и решение гидродинамических задач во многом определяются режимом работы залежей.

**Режимом работы** залежи называется проявление преобладающего вида пластовой энергии, за счет которой обеспечивается приток флюида из поровых каналов к забоям скважин.

Основными **формами потенциальной пластовой энергии** являются:

- энергия напора (положения) пластовой воды;
- энергия расширения свободного газа (газовой шапки);
- энергия расширения растворенного в нефти газа;
- энергия упругости (упругой деформации) нефти, воды и породы;
- энергия напора (положения) нефти.

Энергии этих видов могут проявляться в залежи совместно, а энергия упругости нефти, воды и породы наблюдается всегда. В нефтегазовых залежах в присводовой части активную роль играет энергия газовой шапки, а в приконтурных зонах - энергия напора или упругости пластовой воды. В зависимости от темпа отбора нефти добывающие скважины, расположенные вблизи внешнего контура нефтеносности, могут создавать такой экранирующий эффект, при котором в центре залежи будет действовать в основном энергия расширения растворенного газа, а на периферии - энергия напора или упругости пластовой воды, и т.д.

По преобладающему виду энергии различают следующие режимы работы залежей:

- водонапорный (ВНР);
- упругий;
- режим растворенного газа (РРГ);
- газонапорный (ГНР);
- гравитационный.

Такое деление на режимы “в чистом виде” весьма условно. При реальной разработке месторождений в основном отмечают смешанные режимы. Тем не менее выделение основных режимов способствует созданию модели разработки, достаточно успешно описывающей реальные процессы фильтрации.

Природные условия залежи лишь способствуют развитию определенного режима ее работы. Конкретный режим можно установить, поддержать или заменить другим путем изменения темпов отбора жидкости, ввода дополнительной энергии в залежь и т.д.

#### **1.4. Особенности фильтрации. Характеристики пористой среды.**

**Фильтрацией** называется движение жидкостей, газов и их смесей в пористых и трещиноватых средах, т.е. в твердых телах, пронизанных системой сообщающихся между собой пор и микротрещин.

В отличие от движения жидкости по трубам фильтрации присущи следующие основные **особенности**:

- чрезвычайно малые размеры поровых каналов;
- крайне низкие скорости движения жидкостей;
- исключительно большая роль сил трения вследствие вязкости жидкостей, огромных поверхностей поровых каналов и их шероховатости.

Основной режим	Разновидность режима	Условия существования	Преобладающая форма пластовой энергии	Коэффициент конечной нефтеотдачи
I. Упругий	1. Чисто упругий (I фаза)	1. Пластовое давление выше давления насыщения 2. Забойные давления не ниже давления насыщения 3. Депрессионная воронка распространяется до границ залегания залежи (за пределы контура нефтеносности)	Упругое расширение неф-ти, связанной воды и поро-ды	0,5 - 0,8
	2. Замкнуто-упругий (II фаза)	1. Залежь литологически или тектони-чески ограничена 2. Отсутствует напор контурных вод 3. Пластовое давление снижается, оставаясь выше давления насыщения	Упругое расширение неф-ти, связанной воды и поро-ды	
	3. Упруго-водонапор-ный (УВНР) (может считаться разновидностью ВНР)	1. Значительная по размерам, гидроди-намически связанная с залежью законтурная водоносная область 2. Пластовое давление выше давления насыщения 3. Депрессионная воронка распространя-ется в законтурную водоносную область	Упругое расширение неф-ти, связанной воды в неф-тенасыщенной части, воды в водоносной области, по-род пласта в нефтена-сыщенной части и водонос-ной области + напор краевой воды	
II. Водонапорный	4. Жесткий водонапор-ный (ЖВНР)	1. Наличие напора контурных вод и закачка в пласт необходимых объемов воды 2. Равенство количеств отобранной жидкости (нефти и воды) и вторгшейся в залежь воды В естественных условиях этот режим не встречается, поскольку соблюсти баланс отбора и закачки достаточно сложно. Однако широко используется при моделировании процесса разработки и расчетах технологических показателей.	Напор контурных вод; напор закачиваемой воды	0,5 - 0,8

Основной режим	Разновидность режима	Условия существования	Преобладающая форма пластовой энергии	Коэффициент конечной нефтеотдачи
III. Газонапорный (режим газовой шапки)	5. Упругий газонапорный	1. Наличие газовой шапки 2. Начальное пластовое давление на уровне ГНК равно давлению насыщения 3. По мере отбора нефти давление газа уменьшается	Напор газа газовой шапки	0,1 - 0,4
	6. Жесткий газонапорный	1. Давление в газовой шапке остается постоянным 2. В подавляющем большинстве случаев - закачка газа в газовую шапку	Напор газа газовой шапки и напор закачиваемого газа	
IV. Режим растворенного газа	7. РРГ в полном объеме пласта	1. Залежь запечатана 2. Пластовое давление меньше давления насыщения	Расширение пузырьков выделившегося из нефти газа	0,05 - 0,3
	8. Режим вытеснения газированной нефти водой (смешанный)	1. Ограниченный напор контурных вод 2. Давление на контуре нефтеносности равно давлению насыщения или выше него 3. Пластовое давление на 10-20% ниже давления насыщения	Расширение пузырьков выделившегося из нефти газа + упругое расширение и напор контурной воды	
V. Гравитационный	9. Напорно-гравитационный	1. Нефть под действием собственного веса перемещается вниз по падению крутозалегающего пласта и заполняет его пониженные части 2. Перемещающийся контур нефтеносности	Напор столба нефти	0,1 - 0,2
	10. Гравитационный со свободной поверхностью (безнапорный)	1. Уровень нефти находится ниже кровли горизонтально залегающего пласта 2. Карьерный и шахтный способ эксплуатации нефтяных залежей 3. неподвижный контур нефтеносности	Энергия положения нефти	

Одной из основных характеристик пористой среды служит **коэффициент пористости**.

Коэффициентом пористости называется отношение объема пор ко всему объему пористой среды:

$$m = \frac{V_n}{V}.$$

Под пористостью в теории фильтрации понимается **эффективная (активная) пористость**, учитывающая только те поры и микротрещины, которые соединены между собой и через которые может фильтроваться жидкость.

**Скоростью фильтрации** называется отношение объемного расхода (дебита) жидкости или газа к общей площади поперечного сечения образца породы:

$$V = \frac{Q}{F}.$$

По-другому  $V$  - это фиктивная скорость, т.е. скорость, с которой двигалась бы жидкость, если бы пористая среда отсутствовала ( $m=1$ ).

Средняя величина скорости фильтрации в сечении  $F$  совпадает с истинной скоростью в тех случаях, когда скорость фильтрации не меняется по сечению пласта. В общем случае в различных точках сечения  $F$  скорость фильтрации может быть неодинакова. Тогда *истинное значение скорости фильтрации* в любой точке пласта определится соотношением:

$$v = \frac{dQ}{dF},$$

где  $dQ$  - величина объемного расхода жидкости сквозь проходящую через данную точку элементарную площадку  $dF$ , нормальную к направлению скорости фильтрации.

**Средняя действительная скорость движения жидкости  $W$**  равна отношению объемного расхода (дебита) к площади просветов  $F_n$ :

$$W = \frac{Q}{F_n}.$$

Скорость фильтрации и средняя действительная скорость движения связаны соотношением:

$$W = \frac{Q}{F_n} = \frac{Q}{F \cdot m'} = \frac{V}{m'} = \frac{V}{m},$$

где  $m'$  - коэффициент просветности,  $m' = m$ .

*Истинное значение действительной скорости течения* определится из соотношения:

$$w = \frac{dx}{dt}.$$

Пользоваться понятием «средняя скорость фильтрации» достаточно удобно, поскольку с ее помощью пласт можно рассматривать как непрерывное поле



скоростей и давлений, величина которых в каждой точке пласта является только функцией координат этой точки и времени и не зависит от свойств среды.

### 1.5. Обобщенный теоретический закон фильтрации

Форма и размер сечений поровых каналов резко и хаотически меняются в пространстве. Это затрудняет точное решение уравнений течения вязкой жидкости. Поэтому первые теоретические исследования порового пространства проводились с помощью идеализированных моделей. Такими моделями являлись идеальный и фиктивный грунты.

Под **идеальным грунтом** понимается модель пористой среды, поровые каналы которой представляют собой пучок тонких цилиндрических трубок (капилляров) с параллельными осями.

**Фиктивным грунтом** называется модель пористой среды, состоящая из шарообразных частиц одинакового диаметра и служащая прообразом реального грунта.

Модель идеального грунта использовалась как ступень для перехода от закономерностей трубной гидравлики к движению жидкости в фиктивном, а затем реальном грунтах.

Известно, что гидравлические потери напора при движении вязкой жидкости **по трубам** определяются формулой Пуазейля:

$$\Delta h = \frac{32\mu\Delta LV}{\rho g D^3}, \quad (1.1)$$

где  $\Delta h$  - потеря напора на трение на участке длиной  $\Delta L$ ;  $\mu$  - динамическая вязкость жидкости;  $\rho$  - плотность жидкости;  $D$  - диаметр трубы.

Обозначим площадь поперечного сечения трубы  $f$ :

$$f = \frac{\pi D^2}{4}.$$

Запишем уравнение (1.1) в виде:

$$\rho g \Delta h = \frac{32\pi\mu\Delta LV}{4f} = \frac{8\pi\mu\Delta LV}{f}.$$

Поскольку  $\rho g \Delta h = \Delta P$ , где  $\Delta P$  - перепад давления на длине  $\Delta L$ , имеем:

$$\Delta P = \frac{8\pi\mu\Delta LV}{f}.$$

Отсюда выразим скорость:

$$V = \frac{f\Delta P}{8\pi\mu\Delta L} \quad (1.2)$$

- справедливо для трубы или идеального грунта.

Чтобы перейти от идеального грунта к фиктивному, очевидно, следует связать площадь сечения единичного порового канала  $f$  с площадью просветности фиктивного грунта, а также учесть форму порового пространства. Это можно сделать, геометризирова сечения поровых каналов и выражая плотность укладки шарообразных частиц (угол  $60^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ ) через пористость. В результате разными исследователями были получены однотипные формулы **закона фильтрации жидкости в фиктивном грунте**:

$$Q = \frac{d^2 F \Delta P}{96 \sigma \mu \Delta L}, \quad (1.3)$$

где  $F$  - площадь сечения пористой среды,  $d$  - диаметр частиц.

В них по-разному определялся лишь параметр  $\sigma$ :

$$\sigma_1 = \frac{1-m}{(m')^2}; \quad \sigma_2 = \frac{(1-m)^2}{m^3}; \quad \sigma_3 = \frac{(1-m)^2}{48m} \quad \text{и т.д.}$$

По предложению Л.С.Лейбензона безразмерный параметр  $1/96\sigma$ , зависящий от пористости, был назван **числом Сликтера**. Из формулы (1.3) имеем:

$$Sl = \frac{1}{96\sigma} = \frac{Q \mu \Delta L}{d^2 F \Delta P}. \quad (1.4)$$

При фильтрации жидкости в **реальном грунте** число  $Sl$  является функцией не только пористости, но и зависит от структуры порового пространства. Кроме того, для корректного перехода от фиктивного грунта к реальному необходимо, чтобы эти грунты были *эквивалентны* (т.е. должны быть равны гидравлические сопротивления, оказываемые потоку жидкости). С этой целью вместо диаметра  $d$  частиц фиктивного грунта вводится эффективный диаметр  $d_e$ , определяемый по результатам механического анализа естественного грунта.

С учетом сказанного, а также имея в виду, что  $Q/F=V$ , получаем **обобщенное выражение теоретических законов фильтрации**:

$$V = \frac{d_e^2 Sl(m, \varepsilon) \Delta P}{\mu \Delta L}. \quad (1.5)$$

Здесь  $\varepsilon$  - некоторый параметр, характеризующий структуру порового пространства.

Значения числа  $Sl$  у различных авторов различны, поскольку каждый из них при выводе закона фильтрации по-своему подходил к решению задачи о сведении фиктивного грунта к идеальному. Однако общим для всех уравнений является линейная зависимость между скоростью фильтрации и перепадом давления на единице длины, а также присутствие в формуле, выражающей закон фильтрации, квадрата эффективного диаметра частиц и числа Сликтера, зависящего от коэффициента пористости и структуры порового пространства.

В дифференциальной (векторной) форме уравнение (1.5) запишется в виде:

$$V = - \frac{d_e^2 Sl(m, \varepsilon)}{\mu} \frac{dP}{dl}. \quad (1.6)$$

Знак минус показывает, что давление уменьшается в положительном направлении оси  $l$  в сторону движения потока ( $dl$  прирастает, а  $dp$  уменьшается). Ввод знака «минус» в правую часть уравнения позволяет получить в левой его части абсолютное значение скорости.

### 1.6. Линейный закон фильтрации (закон Дарси)

Экспериментальный закон, полученный А.Дарси, имел вид:

$$Q = K_{\phi} \frac{\Delta h}{\Delta L} F, \quad (1.7)$$

где  $Q$  - объемный расход жидкости;  $F$  - площадь поперечного сечения трубы, заполненной песком;  $\Delta h = h_1 - h_2$  - потери напора на длине  $\Delta L$ ;  $K_{\phi}$  - коэффициент фильтрации, зависящий как от структуры пористой среды, так и от свойств фильтрующейся жидкости.

Поскольку  $\Delta h = \Delta P / \rho g$ , а  $V = Q / F$ , то уравнение (1.7) можно представить в виде:

$$V = \frac{K_{\phi}}{\rho g} \frac{\Delta P}{\Delta L}. \quad (1.8)$$

Сопоставим формулы опытного и теоретического законов фильтрации - выражения (1.5) и (1.8). Видно, что

$$K_{\phi} = \frac{d_s^2 S l \rho g}{\mu}, \text{ откуда } \frac{K_{\phi}}{\rho g} = \frac{d_s^2 S l}{\mu}.$$

$K_{\phi}$  обычно используется в гидротехнических расчетах, где приходится иметь дело с одной жидкостью - водой. При решении задач фильтрации различных жидкостей приходится пользоваться различными значениями  $K_{\phi}$ . Кроме того, коэффициент фильтрации по-разному рассчитывается в зависимости от способа определения  $S l$ . Это неудобно, поэтому при исследовании фильтрации нефти и газа пользуются **коэффициентом проницаемости**, который позволяет разделить влияние пористой среды и жидкости.

**Проницаемость** - это свойство пористой среды пропускать через себя жидкости и газы при наличии перепада давления.

Обозначим  $K = d_s^2 S l$ .

Тогда формулы (1.5) и (1.6) запишутся в виде:

$$\begin{aligned} V &= \frac{K}{\mu} \frac{\Delta P}{\Delta L}; \\ V &= - \frac{K}{\mu} \frac{dP}{dl}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

**Скорость фильтрации прямо пропорциональна градиенту давления (закон Дарси).**

Коэффициент проницаемости зависит только от свойств пористой среды и не зависит от свойств жидкости.

$K/\mu$  - коэффициент подвижности.

Единицы измерения проницаемости:

СИ -  $\text{м}^2$ ;  $\text{мкм}^2$ ; СГС - Д (Дарси), мД.  
 $1 \text{ Д} = 1,02 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 \approx 1 \text{ мкм}^2$ .

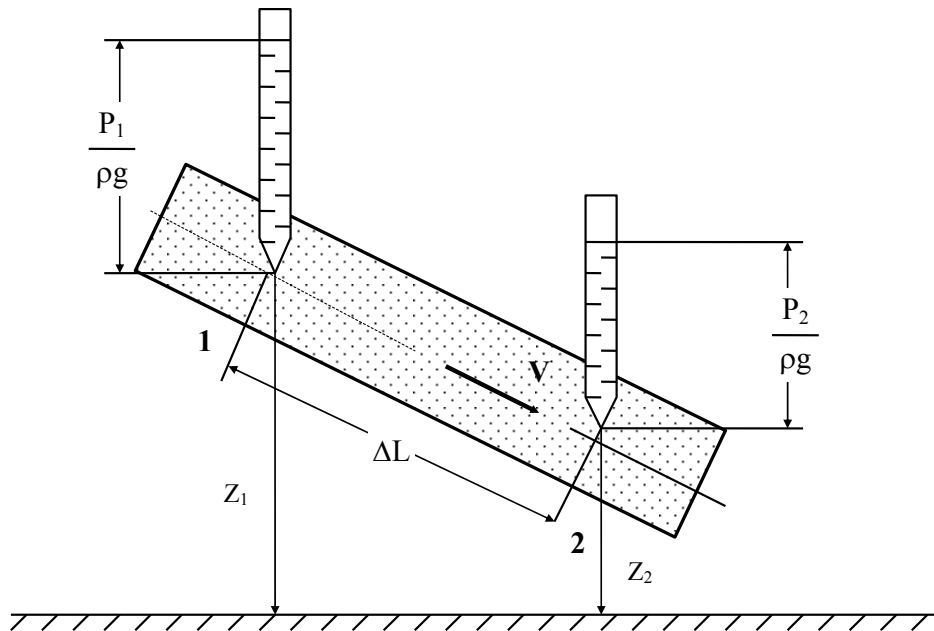
Физический смысл размерности (площадь) заключается в том, что проницаемость как бы характеризует величину площади сечения каналов пористой среды, по которым в основном происходит фильтрация.

Пористость и проницаемость характеризуют фильтрационно-емкостные свойства пласта (ФЕС), причем пористость характеризует емкость, а проницаемость - пропускную способность.

### **1.7. Приведенное давление**

Формулы (1.9) справедливы для фильтрации жидкости в горизонтальном направлении. В тех случаях, когда скорость фильтрации направлена не по горизонтали, наряду с разностью давлений  $\Delta P$  на фильтрацию оказывает влияние сила тяжести.

Рассмотрим элемент наклонного пласта.



Величины напоров в сечениях 1 и 2 составляют:

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= \frac{P_1}{\rho g} + z_1, \\ h_2 &= \frac{P_2}{\rho g} + z_2. \end{aligned} \right\}, \quad (1.10)$$

где  $z_1$  и  $z_2$  - расстояния сечений 1 и 2 от некоторой условной горизонтальной плоскости отсчета.

Потеря напора при фильтрации жидкости в рассматриваемом наклонном пласте:

$$\Delta h = h_1 - h_2 = \frac{\Delta P}{\rho g} + \Delta z, \quad \text{где } \Delta z = z_1 - z_2.$$

Соответственно потеря давления:

$$\Delta P^* = \Delta P + \rho g \Delta z.$$

Тогда закон Дарси запишется в виде:

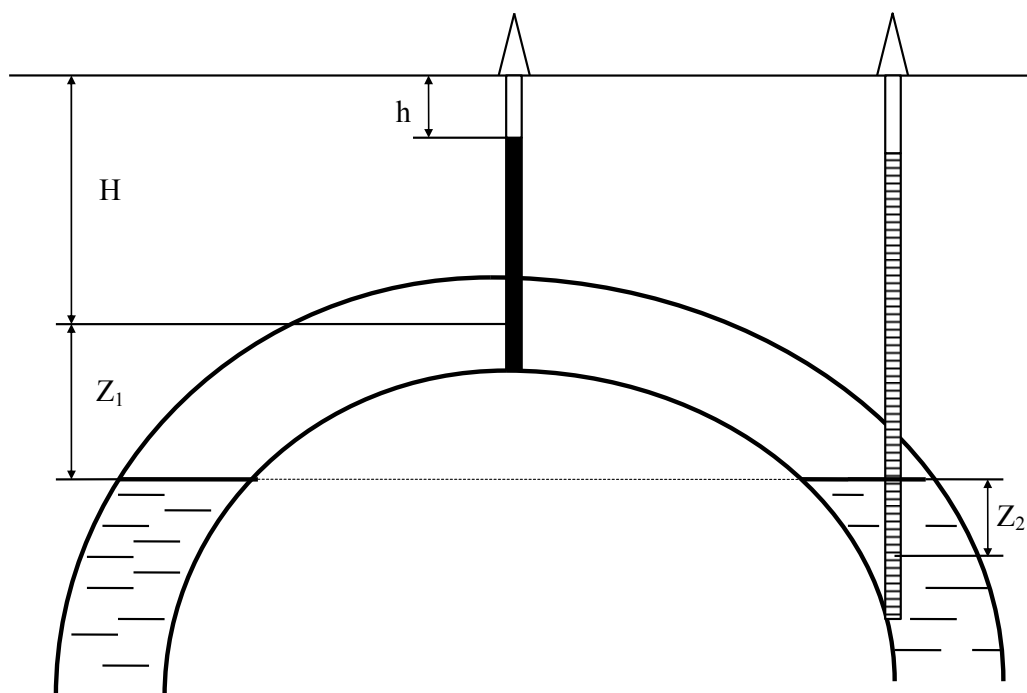
$$V = \frac{K}{\mu} \frac{\Delta P + \rho g \Delta z}{\Delta L} \quad \text{или} \quad V = -\frac{K}{\mu} \frac{d(P + \rho g z)}{dl}.$$

Величину  $P^* = P + \rho g z$  называют **приведенным давлением**.

Тогда в общем случае линейный закон фильтрации можно записать так:

$$V = -\frac{K}{\mu} \frac{dP^*}{dl}.$$

Приведенным пластовым давлением, пересчитанным на какую-либо условную поверхность (чаще всего ВНК или ГНК), пользуются для характеристики залежей.



$$P_{нл.нр.} = P_{нл.а} \pm \rho g Z,$$

где  $P_{нл.а}$  - абсолютное пластовое давление;  $Z$  - расстояние от середины пласта в точке вскрытия скважиной до плоскости приведения.

Если плоскость приведения находится ниже середины пласта, то приведение осуществляется со знаком плюс, если выше - минус.

$$\begin{aligned} P_{1\text{ нл.нр.}} &= P_{1а} + \rho_{н} g Z_1; \\ P_{2\text{ нл.нр.}} &= P_{2а} - \rho_{в} g Z_2. \end{aligned}$$

Если устье скважины находится выше пьезометрической поверхности, то абсолютное давление находим по формуле:

$$P_a = (H - h) \rho_{ж} g,$$

где  $H$  - глубина скважины от устья до середины пласта;  $h$  - глубина пьезометрического уровня от устья.

В скважинах с устьями ниже пьезометрической поверхности

$$P_a = H \rho_{ж} g + P_y,$$

где  $P_y$  - давление на устье скважины.

## 1.8. Границы применимости закона Дарси

В ряде случаев линейность связи между скоростью фильтрации и градиентом давления нарушается. Отклонения от закона Дарси имеют место как при высоких, так и при низких скоростях фильтрации, в последнем случае - за счет проявления жидкостью неньютоновских вязко-структурных свойств.

Применимость закона Дарси при увеличении скоростей фильтрации связана с числом Рейнольдса. В трубной гидравлике критическое значение числа Рейнольдса  $Re_{кр}$  означает переход от ламинарного режима течения к турбулентному. В подземной гидромеханике  $Re_{кр}$  характеризует границу, за пределами которой происходит нарушение линейного закона Дарси.

Формулы для определения числа Рейнольдса были получены многими исследователями.

$$Re = \frac{1}{0,75m + 0,23} \frac{V d_3}{\nu}, \quad 7,5 \leq Re_{кр} \leq 9, \quad (\text{Н.Н.Павловский}) ;$$

$$Re = \frac{10}{m^{2,3}} \frac{V \sqrt{K}}{\nu}, \quad 1 \leq Re_{кр} \leq 12, \quad (\text{В.Н.Щелкачев}) ;$$

$$Re = \frac{V \sqrt{K}}{m^{1,5} \nu}, \quad 0,022 \leq Re_{кр} \leq 0,29, \quad (\text{М.Д.Миллионщиков})$$

и др.

Если вычисленное по одной из этих формул значение числа Рейнольдса оказывается меньше нижнего критического значения  $Re_{кр}$ , то закон Дарси справедлив, если больше верхнего критического - закон Дарси нарушен.

Характерным для всех формул является то, что все они приводят к широким диапазонам изменения  $Re_{кр}$  для различных пористых сред. Это связано с тем, что ни в одну из предложенных формул для определения  $Re$  не входит полный набор параметров, позволяющий характеризовать сложную структуру пористых сред; использование для этой цели коэффициентов пористости и проницаемости оказывается явно недостаточным.

Вместе с тем широкий диапазон изменения значений  $Re_{кр}$  можно разбить на сравнительно узкие интервалы, соответствующие различным типам пористых сред. В этом случае верхняя граница применимости закона Дарси обозначается более четко.

Скорость фильтрации, при которой закон Дарси нарушается, называется критической скоростью фильтрации  $V_{кр}$ .

## 1.9. Нелинейные законы фильтрации

Нелинейные законы фильтрации можно выразить с помощью формул двух видов: одночленной со степенной зависимостью и двучленной.

### 1. Одночленная формула.

$$V = C \left( \frac{\Delta P}{\Delta L} \right)^{\frac{1}{n}},$$

в дифференциальной форме

$$V = -C \left( \frac{dP}{dl} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (1.11)$$

где  $C$  - const, определяемая экспериментально;  $n$  - показатель фильтрации,  $1 \leq n \leq 2$ .

- а)  $n = 1$ ,  $V = -C \frac{dP}{dl}$  - линейный закон Дарси;  
 б)  $n = 2$ ,  $V = -C \sqrt{\frac{dP}{dl}}$  - закон А.А.Краснопольского.

2. Двучленная формула

$$\frac{\Delta P}{\Delta L} = \frac{\mu}{K} V + \beta \frac{\rho}{\sqrt{K}} V^2 \quad - \text{ формула Ф.Форхгеймера }, \quad (1.12)$$

где  $\beta$  - дополнительная константа пористой среды, определяемая экспериментально.

Первое слагаемое в правой части данной формулы учитывает потери давления вследствие вязкости жидкости, второе - инерционную составляющую сопротивления движению жидкости, связанную с криволинейностью поровых каналов.

Запишем формулу (1.12) проще:

$$\frac{\Delta P}{\Delta L} = AV + BV^2$$

или в дифференциальной форме

$$-\frac{dP}{dl} = AV + BV^2.$$

Частные случаи:

- а) при малых  $BV^2 \ll AV$ , следовательно, слагаемым  $BV^2$  можно пренебречь:

$$V = -\frac{1}{A} \frac{dP}{dl} \quad - \text{ закон Дарси (движение безынерционное);}$$

- б) при больших  $BV^2 \gg AV$ , следовательно, можно пренебречь слагаемым  $AV$ :

$$V = -\frac{1}{B} \sqrt{\frac{dP}{dl}} \quad - \text{ закон Краснопольского (силы вязкости пренебрежимо малы по сравнению с силами инерции).}$$

Закон А.А.Краснопольского имеет место лишь в средах, состоящих из частиц достаточно крупных размеров.

Двучленный закон фильтрации (1.12) является физически наиболее обоснованным и осуществляется при всех числах Рейнольдса, встречающихся в практике разработки нефтегазовых месторождений.



### 1.10. Обобщенный закон Дарси

Закон Дарси для течения в пористой среде однородной жидкости можно распространить на случай совместного течения двух несмешивающихся жидкостей (например, нефти и воды). При этом для каждой из фаз можно записать:

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{K_1^*}{\mu_1} \frac{\Delta P_1}{\Delta L}, \\ V_2 &= \frac{K_2^*}{\mu_2} \frac{\Delta P_2}{\Delta L} \end{aligned} \right\}, \quad (1.13)$$

где  $V_1$  и  $V_2$  - скорости фильтрации фаз;  $\mu_1$  и  $\mu_2$  - динамические вязкости жидкостей;  $\Delta P_1$  и  $\Delta P_2$  - разности давлений в соответствующих фазах;  $K_1^*$  и  $K_2^*$  - фазовые проницаемости, зависящие прежде всего от абсолютной проницаемости пористой среды  $K$ :

$$\begin{aligned} K_1^* &= K \cdot K_1; \\ K_2^* &= K \cdot K_2, \end{aligned}$$

где  $K_1$  и  $K_2$  - относительные проницаемости фаз.

В общем случае давления  $P_1$  и  $P_2$  в фазах не совпадают из-за действия поверхностного натяжения и связаны равенством:

$$P_2 - P_1 = P_\kappa,$$

где  $P_\kappa$  - капиллярное давление.

Введенные понятия можно обобщить на случай совместного течения трех несмешивающихся флюидов - нефти, газа и воды, используя относительные проницаемости трех фаз.

#### **Контрольные вопросы**

1. В чем заключается сущность гидродинамических методов моделирования фильтрационных процессов?
2. Охарактеризуйте элементы залежей нефти с газовой шапкой и подошвенной водой.
3. Перечислите основные формы потенциальной пластовой энергии. Дайте определение режима работы залежи.
4. Приведите развернутую классификацию режимов работы реальных залежей.
5. Охарактеризуйте условия существования основных режимов работы залежей и их разновидностей.
6. Сформулируйте закон Дарси. Запишите формулу закона Дарси для случая фильтрации жидкости в протяженном пласте (образце породы).

7. Выведите формулу обобщенного теоретического закона фильтрации. Дайте определения фиктивного и идеального грунтов.
8. Перечислите виды проницаемости и пористости. Дайте их определения.
9. Что собой представляют и как связаны друг с другом скорость фильтрации и действительная средняя скорость движения жидкости?
10. Что такое приведенное давление?
11. В каких случаях происходит нарушение закона Дарси? Что такое критическая скорость фильтрации?
12. Приведите выражения нелинейных законов фильтрации.

## 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ПЛАСТОВЫХ ФЛЮИДОВ

### 2.1. Вводные замечания

Характеристики фильтрационных потоков (давление, скорость фильтрации и др.) изменяются в пласте от точки к точке, т.е. образуют **поле**. Если элементы поля изменяются с течением времени, то движение флюидов является **неустановившимся (нестационарным)**. Задачи неустановившейся фильтрации решаются методами математической физики с помощью систем дифференциальных уравнений.

Число уравнений в системе (дифференциальных и конечных) должно равняться числу неизвестных функций, характеризующих фильтрационный процесс и подлежащих определению. Такая система называется замкнутой.

В число дифференциальных уравнений фильтрации обязательно входят:

- а) уравнение баланса массы в элементе пористой среды (уравнение неразрывности);
- б) дифференциальные уравнения движения.

Для замыкания системы дополнительно вводятся уравнения состояния рассматриваемого флюида и пористой среды. Для получения решения системы уравнений задаются условия на границах пласта и в начальный момент времени.

В результате интегрирования прежде всего определяются распределение давления и скорости фильтрации по всему пласту в любой момент времени, т.е.

$$\begin{aligned} P &= P(x, y, z, t), \\ V_x &= V_x(x, y, z, t), \\ V_y &= V_y(x, y, z, t), \\ V_z &= V_z(x, y, z, t). \end{aligned}$$

В ряде случаев при постановке задачи жидкость и пласт можно считать несжимаемыми. Пористая среда считается **несжимаемой (недеформируемой)**, если объем пор не изменяется при изменении давления в них жидкости. Если же изменением объема пор при изменении давления пренебречь нельзя, то такие среды следует рассматривать как **упругие (деформируемые, сжимаемые)**.

При рассмотрении несжимаемой идеальной жидкости ( $\mu, \rho - const$ ) в недеформируемой пористой среде ( $K, m - const$ ) число искомых функций ограничивается четырьмя перечисленными функциями.

Для фильтрации сжимаемого флюида в деформируемой (упругой) пористой среде нужно дополнительно определить плотность  $\rho$ , вязкость  $\mu$ , пористость  $m$  и проницаемость  $K$  как функции координат и времени. В этом случае нужно иметь восемь уравнений - дифференциальных и конечных - для определения восьми характеристик фильтрационного потока, жидкости и пористой среды.

Постановка математической задачи, соответствующей процессу разработки реальной залежи и включающей дифференциальные и конечные уравнения, а также начальные и граничные условия, является **центральной etapом моделирования**.

Аналитическое (в виде формул) решение системы дифференциальных уравнений можно получить лишь в ограниченном числе простейших, сильно идеализированных случаев. В более сложных случаях система решается численными методами с применением ЭВМ.

## 2.2. Вывод уравнения неразрывности фильтрационного потока для однородного сжимаемого флюида в деформируемой пористой среде

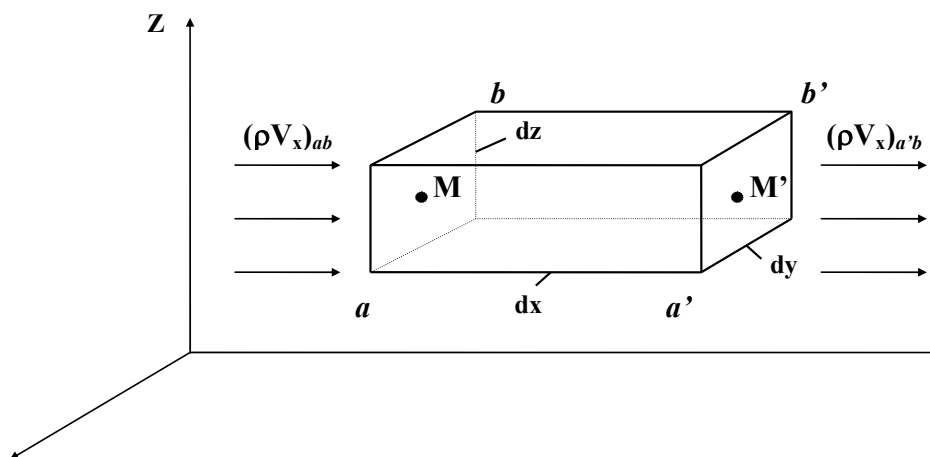
Для вывода дифференциальных уравнений фильтрации в пористой среде выделяется бесконечно малый элемент пористой среды и затем рассматриваются изменения массы, энергии и т.д., происходящие в нем за бесконечно малый промежуток времени. При этом используются законы сохранения массы и энергии, а также дополнительные результаты, полученные в ходе экспериментального изучения свойств среды и поведения в ней флюидов.

Мы ограничимся рассмотрением процессов, для которых температура флюида равна температуре среды и неизменна. Вследствие того, что фильтрация представляет собой очень медленный процесс, изменение температуры, возникающее в ходе движения за счет сопротивления и расширения вещества, успевает компенсироваться теплообменом с окружающими горными породами.

Для таких изотермических процессов уравнения энергии рассматривать уже не нужно. Вместе с тем изучение неизоэтермических процессов имеет особо важное значение в связи с возможностью повышения нефтеотдачи при закачке в пласт теплоносителя (горячей воды, пара).

**Уравнение неразрывности (сплошности) фильтрационного потока представляет собой уравнение баланса массы в элементарном объеме пористой среды.**

Выделим мысленно в пористой среде, в которой происходит движение флюида, элементарный объем в виде параллелепипеда с ребрами  $dx, dy, dz$ .



Пусть точка  $M$ , совпадающая с центром левой грани  $av$ , имеет координаты  $x, y, z$ . Тогда точка  $M'$  в центре грани  $a'b'$  имеет координаты  $x+dx, y, z$ .

Масса флюида, втекающего в объем через грань  $av$  за малый промежуток времени  $dt$ , записывается в виде:

$$(\rho V_x)_{ab} dydzdt.$$

Масса флюида, вытекающего из объема через грань  $a'b'$  за малый промежуток времени  $dt$ , записывается в виде:

$$(\rho V_x)_{a'b'} dydzdt.$$

Но так как при переходе от точки  $M$  к точке  $M'$  координата  $x$  изменилась на малую величину  $dx$ , то можно записать:

$$(\rho V_x)_{a'b'} = (\rho V_x)_{ab} + \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} dx.$$

Тогда изменение массы флюида в объеме  $abb'a'$  за промежуток времени  $dt$  за счет потока вдоль оси  $x$  составит:

$$[(\rho V_x)_{ab} - (\rho V_x)_{a'b'}] dydzdt = -\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} dx dydzdt.$$

Аналогично выражения для изменения массы в элементарном объеме за счет потока вдоль осей  $y$  и  $z$  запишутся в виде:

$$-\frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} dx dydzdt \quad \text{и} \\ -\frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} dx dydzdt.$$

Общее изменение (накопление) массы в объеме  $dx dydz$  за время  $dt$  будет равно:

$$\frac{\partial M}{\partial t} dt = -\left[ \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} \right] dx dydzdt. \quad (2.1)$$

С другой стороны, масса флюида, находящегося в рассматриваемом элементарном поровом объеме, равна:

$$M = \rho m dx dydz,$$

где  $m$  – коэффициент пористости.

Тогда изменение массы  $M$  флюида за промежуток времени  $dt$  запишется в следующем виде:

$$\frac{\partial M}{\partial t} dt = \frac{\partial(\rho m)}{\partial t} dx dy dz dt \quad (2.2)$$

Приравнявая правые части выражений (2.1) и (2.2) и сокращая их на  $dx dy dz dt$ , получим искомое уравнение неразрывности:

$$-\left[ \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} \right] = \frac{\partial(\rho m)}{\partial t}. \quad (2.3)$$

Выражение в левой части уравнения (2.3) представляет собой дивергенцию вектора массовой скорости фильтрации, поэтому уравнение неразрывности имеет также следующую запись:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{V}) + \frac{\partial(\rho m)}{\partial t} = 0.$$

В случае установившейся фильтрации несжимаемой жидкости в недеформируемом пласте  $V = \text{const}$ ,  $\rho = \text{const}$ ,  $m = \text{const}$  в каждой точке среды.

Тогда

$$\frac{\partial(\rho m)}{\partial t} = 0,$$

в силу чего уравнение неразрывности принимает вид:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0. \quad (2.3')$$

### 2.3. Дифференциальные уравнения движения.

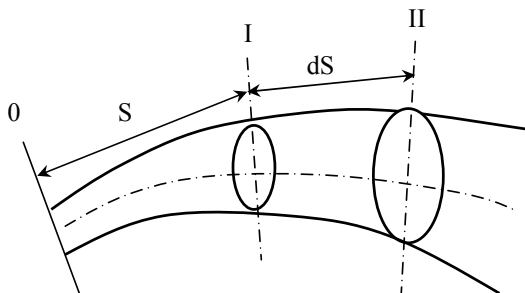
#### Основное уравнение фильтрации.

#### Закон Дарси для анизотропных сред

Закон Дарси  $V = \frac{K}{\mu} \frac{\Delta P^*}{\Delta L}$  записан в конечном виде, т.е. для пласта или образца породы с постоянной площадью сечения.

Для трубки тока с переменной площадью сечения закон Дарси запишется в дифференциальной форме:

$$V = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial P^*}{\partial S}. \quad (2.4)$$



В проекциях на оси координат:

$$\left. \begin{aligned} V_x &= -\frac{K}{\mu} \frac{\partial P^*}{\partial x}, \\ V_y &= -\frac{K}{\mu} \frac{\partial P^*}{\partial y}, \\ V_z &= -\frac{K}{\mu} \frac{\partial P^*}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \text{ - дифференциальные уравнения движения}$$

Если ось  $z$  направлена вертикально вверх, то дифференциальные уравнения движения примут вид:

$$\left. \begin{aligned} V_x &= -\frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}, \\ V_y &= -\frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y}, \\ V_z &= -\frac{K}{\mu} \left( \frac{\partial P}{\partial z} + \rho g \right). \end{aligned} \right\} \quad .(2.5)$$

Определим из системы уравнений (2.5) производные  $\frac{\partial V_x}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial V_y}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial V_z}{\partial z}$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial x} &= -\frac{K}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial V_y}{\partial y} &= -\frac{K}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial V_z}{\partial z} &= -\frac{K}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}. \end{aligned} \right\}$$

После подстановки полученных значений в уравнение неразрывности (2.3') получим:

$$-\frac{K}{\mu} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \nabla^2 P = \operatorname{div} \nabla P = 0. \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) является дифференциальным уравнением установившейся фильтрации несжимаемой жидкости по закону Дарси в недеформируемой пористой среде и называется уравнением Лапласа.

Основное уравнение фильтрации выводится путем объединения уравнения неразрывности, уравнений движения и, если флюид сжимаем, уравнений состояния. В наиболее общем виде оно записывается в виде:

$$\frac{K}{\mu} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho \frac{\partial P}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial(\rho m)}{\partial t}. \quad (2.7)$$

Формула (2.4) справедлива для **изотропной** среды, для которой характерно постоянство проницаемости  $K$  по всем направлениям в окрестности рассматриваемой точки.

Пористые среды, в которых коэффициент проницаемости зависит от направления потока, называются **анизотропными**. Большинство пород-коллекторов имеют отчетливую слоистую структуру. Если плоскость  $xy$  совместить с плоскостью слоя, а координатную ось  $z$  направить перпендикулярно, то закон Дарси можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} V_x &= -\frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}, \\ V_y &= -\frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y}, \\ V_z &= -\frac{K_z}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z}. \end{aligned} \right\} - \text{дифференциальные уравнения движения для анизотропных сред}$$

Здесь  $K$  – проницаемость параллельно напластованию;  $K_z$  – проницаемость перпендикулярно напластованию.

## 2.4. Уравнения состояния

Дифференциальные уравнения (2.3) и (2.5) содержат коэффициенты плотности  $\rho$  и вязкости  $\mu$  флюида, а также коэффициенты пористости  $m$  и проницаемости  $K$  породы. Зависимости этих параметров от давления называются *уравнениями состояния* флюида и пористой среды.

Параметр	Экспоненциальная зависимость	Линейная зависимость
Плотность	$\rho = \rho_0 \cdot e^{\beta_{ж}(P - P_0)}$	$\rho = \rho_0 [1 + \beta_{ж}(P - P_0)]$
Вязкость	$\mu = \mu_0 \cdot e^{-\alpha_{\mu}(P_0 - P)}$	$\mu = \mu_0 [1 - \alpha_{\mu}(P_0 - P)]$

Пористость	$m = m_0 \cdot e^{-\alpha_m(P_0 - P)}$	$m = m_0 + \beta_c(P - P_0)$
Проницаемость	$K = K_0 \cdot e^{-\alpha_k(P_0 - P)}$	$K = K_0 [1 - \alpha_k(P_0 - P)]$

$\rho_0, \mu_0, m_0, K_0$  – значения параметров при фиксированном (начальном) давлении  $P_0$ ;

$\rho, \mu, m, K$  – значения параметров при текущем давлении  $P$ ;

$\beta_{жс}$  – коэффициент объемного сжатия жидкости,  $\text{Па}^{-1}$ ;

$\beta_c$  – коэффициент объемной упругости среды,  $\text{Па}^{-1}$ ;

$\alpha_\mu, \alpha_m, \alpha_k$  – коэффициенты, определяемые экспериментально и зависящие от свойств жидкости и породы,  $\text{Па}^{-1}$ .

Уравнения состояния пласта и насыщающих его флюидов замыкают систему дифференциальных уравнений.

## 2.5. Начальные и граничные условия

Чтобы решить систему уравнений, необходимо задать начальные и граничные условия.

*Начальное условие* заключается в том, что задается искомая функция во всей области в некоторый момент времени, принимаемый за начальный.

Например, если искомой функцией является пластовое давление, то начальное условие может иметь вид:

$$P = P_0(x, y, z) \text{ при } t = 0,$$

т.е. в начальный момент времени задается распределение давления во всем пласте.

Если в начальный момент пласт невозмущен, то начальное условие принимает вид:

$$P = P_0 = \text{const} \text{ при } t = 0.$$

*Граничные условия* задаются на границах пласта.

Продуктивный пласт или выделенную из него часть можно рассматривать как некоторую область пространства, ограниченную поверхностями – границами. Внешними границами являются кровля и подошва пласта, а также контур питания. Стенка скважины является внутренней границей пласта.

Число граничных условий должно быть равно порядку дифференциального уравнения по координатам.

Возможны следующие граничные условия.

На внешней границе  $\Gamma$

1. Постоянное давление

$$P(\Gamma, t) = \text{const},$$



т.е. граница является контуром питания.

2. Постоянный переток через границу

$$\frac{\partial P}{\partial n} = const,$$

где  $n$  – нормаль к границе  $\Gamma$ .

3. Переменный переток через границу

$$\frac{\partial P}{\partial n} = f_1(t).$$

4. Замкнутая внешняя граница

$$\frac{\partial P}{\partial n} = 0.$$

5. Бесконечный по простиранию пласт

$$\lim_{x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty} P(x, y, t) = P_k = const.$$

#### На внутренней границе

6. Постоянное давление на забое скважины

$$P(r_c, t) = P_c = const,$$

где  $r_c$  – радиус скважины.

7. Постоянный дебит.

При выполнении закона Дарси

$$Q = \frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} 2\pi r_c h = const, \text{ или}$$

$$r \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{Q\mu}{2\pi K h} \quad \text{при} \quad r = r_c.,$$

где  $2\pi r_c h$  – площадь боковой поверхности скважины;  $h$  – толщина пласта.

8. Переменное давление на забое скважины

$$P(r_c, t) = f_2(t) \quad \text{при} \quad r = r_c..$$

9. Переменный дебит

$$r \frac{\partial P}{\partial r} = f_3(t) \quad \text{при} \quad r = r_c..$$

10. Отключение скважины

$$r \frac{\partial P}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = r_c..$$

#### **Контрольные вопросы:**

1. Дайте определения неустановившегося движения флюида в пористой среде, несжимаемой и упругой сред.

2. Что включает постановка математической задачи, соответствующей процессу разработки реальной залежи?

3. Выведите уравнение неразрывности фильтрационного потока.
4. Что представляют собой дифференциальные уравнения движения?
5. Получите дифференциальное уравнение установившейся фильтрации несжимаемой жидкости и поясните основное уравнение фильтрации.
6. Как учитывается анизотропия пласта в дифференциальных уравнениях движения?
7. Что представляют собой уравнения состояния?
8. Охарактеризуйте начальные и граничные условия.

### 3. ОДНОМЕРНЫЕ УСТАНОВИВШИЕСЯ ПОТОКИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

#### 3.1. Типы фильтрационных потоков

При решении гидродинамических задач плоское течение аппроксимируется квазиодномерным. Для этого вся область фильтрации условно делится на несколько подобластей, в пределах которых течение флюида считается одномерным.

Одномерным называется фильтрационный поток, в котором скорость фильтрации и напор (давление) являются функциями только одной координаты, отсчитываемой вдоль линии тока.

Существует три типа одномерных фильтрационных потоков, полное исследование которых можно выполнить элементарными методами:

- 1) прямолинейно-параллельный;
- 2) плоскорадиальный;
- 3) радиально-сферический.

##### Прямолинейно-параллельный поток

Прямолинейно-параллельный поток встречается в лабораторных условиях при движении жидкости или газа через цилиндрический керн параллельно его оси, а также в протяженных пластах с односторонним контуром питания.

Прямолинейно-параллельный поток имеет место в том случае, когда траектории всех частиц флюида являются прямолинейными прямыми, а скорости фильтрации во всех точках любого поперечного сечения потока равны друг другу.

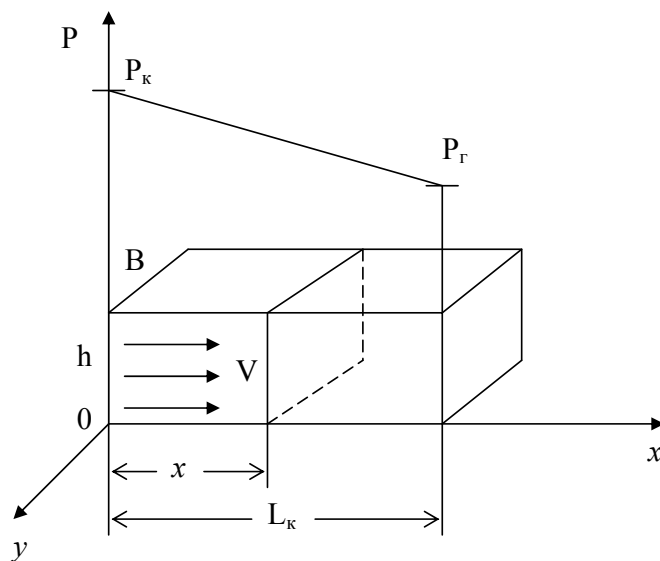


Рис. 3.1. Схема прямолинейно-параллельного фильтрационного потока

На схеме:  $P_k$  – давление на контуре питания;  $P_c$  – давление на контуре питания

В зависимости от природных условий и реализуемой системы разработки за контур питания принимается:

а) линия, соответствующая выходам пласта, откуда он пополняется поверхностными водами. В этом случае  $P_k$  определяется высотой положения зеркала воды в области питания (гидростатического столба);

б) условная зона нагнетания, т.е. абстракция, представляющая собой крайний предел уплотнения сетки нагнетательных скважин.

*Добывающая галерея* символизирует собой зону отбора пласта. Это абстракция, представляющая собой крайний предел уплотнения добывающих скважин.

### Плоскорадиальный поток

Данный тип потока имеет место в случае, когда все частицы жидкости или газа движутся в одной плоскости по горизонтальным прямолинейным траекториям, радиально сходящимся к одной точке.

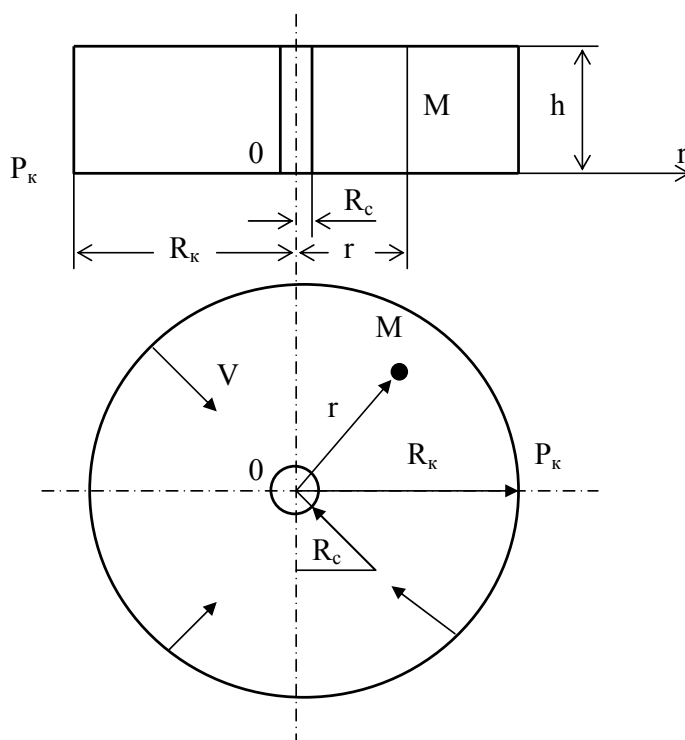


Рис. 3.2. Схема плоскорадиального фильтрационного потока

Примером служит движение жидкости в горизонтальном пласте постоянной толщины и неограниченной протяженности, в центре которого расположена одна скважина, вскрывшая пласт на всю толщину и имеющая открытый забой.

### Радиально-сферический поток

Данный тип потока имеет место в случае, когда скважина вскрывает только кровлю пласта или глубина вскрытия значительно меньше толщины пласта. При этом траектории движения всех частиц жидкости или газа в пласте будут прямолинейными и радиально сходящимися в центре полусферического забоя.

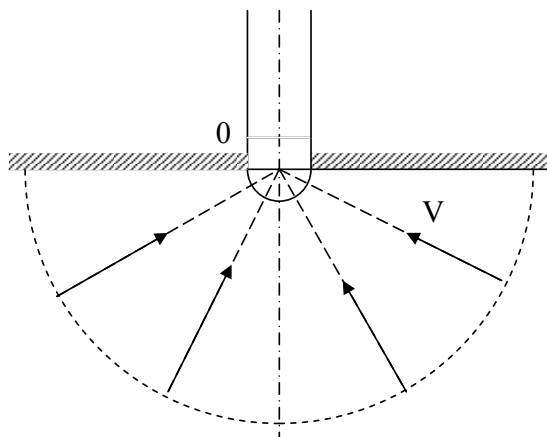


Рис. 3.3. Схема радиально-сферического фильтрационного потока

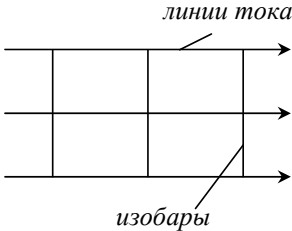
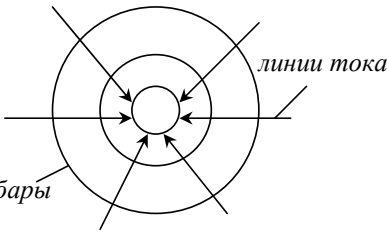
Все эти типы потоков относятся к одномерным, поскольку давление и скорость фильтрации являются функциями только одной координаты (линейной или радиуса).

### 3.2. Сравнительная характеристика потоков

Рассмотрим характеристики двух основных фильтрационных потоков – прямолинейно-параллельного и плоскорадиального, исходя из следующих условий:

- 1) режим работы пласта – жесткий водонапорный;
- 2) движение жидкости – установившееся (скорость фильтрации и напор зависят от координаты, но не зависят от времени; траектории частиц жидкости совпадают с линиями тока);
- 3) пласт однородный и недеформируемый;
- 4) жидкость несжимаемая;
- 5) соблюдается закон Дарси.

Характеристика	Прямолинейно-параллельный поток	Плоскорадиальный поток
Уравнение Лапласа	$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0$	В декартовых координатах: $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$
		В цилиндрических координатах: $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$
Закон и скорости фильтрации (движения)	1) $V = \frac{Q}{F}$ ; $F = Bh$ ; 2) $V = -\frac{K}{\mu} \frac{dP}{dx}$ ; 3) $V = mw = m \frac{dx}{dt}$	1) $V = \frac{Q}{F}$ ; $F = 2\pi rh$ ; 2) $V = \frac{K}{\mu} \frac{dP}{dr}$ ; 3) $V = mw = -m \frac{dr}{dt}$
Дебит галереи (скважины)	$Q = \frac{BK h (P_k - P_c)}{\mu L_k} = const$	$Q = \frac{2\pi K h (P_k - P_c)}{\mu \ln \frac{R_k}{r_c}}$ - формула Дюпюи
Закон распределения давления	$P = P_k - \frac{P_k - P_c}{L_k} x$	$P = P_k - \frac{P_k - P_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \ln \frac{R_k}{r}$
Скорость фильтрации	$V = \frac{K(P_k - P_c)}{\mu L_k} = const$	$V = \frac{K(P_k - P_c)}{\mu \ln \frac{R_k}{r_c}} \cdot \frac{1}{r}$
Градиент давления	$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{P_k - P_c}{L_k} = const$	$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{P_k - P_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \cdot \frac{1}{r}$
Закон движения частиц жидкости	а) $t = \frac{m \mu L_k}{K(P_k - P_c)} x$ ; б) $t = \frac{m B h}{Q} x$ , где $x$ – текущее положение частицы жидкости в момент времени $t$	а) $t = \frac{m \mu \ln \frac{R_k}{r_c}}{K(P_k - P_c)} \frac{R_0^2 - r^2}{2}$ б) $t = \frac{\pi h m (R_0^2 - r^2)}{Q}$ , где $R_0$ – начальное положение частицы жидкости в момент времени $t=0$ ; $r$ – текущее положение частицы жидкости в момент времени $t$
Полное время истечения	$T = \frac{m \mu L_k}{K(P_k - P_c)}$	$T = \frac{m \mu \ln \frac{R_k}{r_c}}{K(P_k - P_c)} \frac{R_k^2}{2}$

Средневзвешенное пластовое давление	$\tilde{P} = \frac{P_k + P_c}{2}$	$\tilde{P} = P_k - \frac{P_k - P_c}{2 \ln \frac{R_k}{R_c}}$
Гидродинамическое поле фильтрации		

Анализируя соотношения, можно отметить следующее.

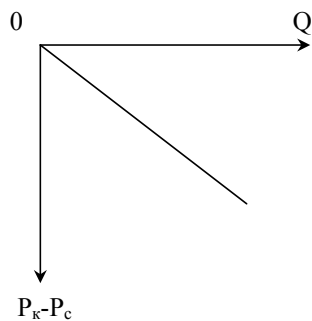
В прямолинейно-параллельном потоке:

- а) дебит жидкости, скорость фильтрации и градиент давления постоянны вдоль потока (не зависят от координаты сечения  $x$ );
- б) пластовое давление распределяется вдоль оси  $x$  по линейному закону.

В плоскорадиальном потоке:

- а) дебит скважины  $Q$  прямо пропорционален перепаду давления  $(P_k - P_c)$  и не зависит от координаты  $r$ .

График зависимости дебита от перепада давления называется индикаторной диаграммой. В случае соблюдения закона Дарси индикаторная диаграмма имеет вид прямой линии:



Отношение дебита скважины к перепаду давления называется коэффициентом продуктивности  $\eta$ :

$$\eta = \frac{Q}{\Delta P} = \frac{2\pi Kh}{\mu \ln \frac{R_k}{R_c}}, \text{ м}^3/(\text{Па}\cdot\text{с}).$$

б) скорость фильтрации и градиент давления в любой точке пласта обратно пропорциональны расстоянию  $r$  от этой точки до оси скважины.

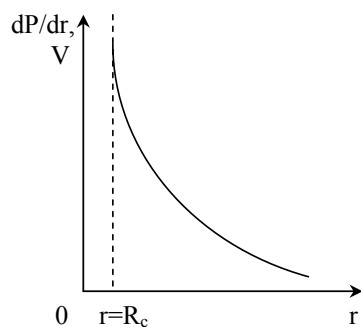
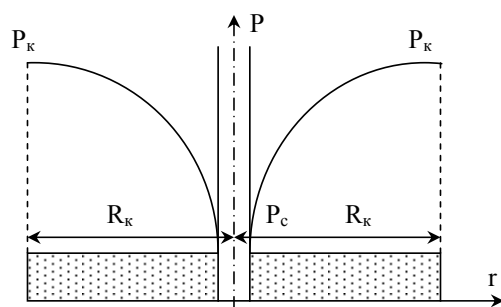


График зависимости градиента давления и скорости фильтрации от координаты  $r$  представляет собой гиперболу. Из построения видно, что при приближении к скважине и градиент давления, и скорость фильтрации резко возрастают, достигая максимальных значений на стенке скважины;



в) графиком зависимости  $P(r)$  является логарифмическая кривая, вращение которой вокруг оси скважины образует поверхность, называемую воронкой депрессии.

Основная часть депрессии на пласт сосредоточена в призабойной зоне скважины, параметры которой сильно влияют на дебит скважины.

### 3.3. Фильтрация жидкости в неоднородных пластах

Пласты, значительные области которых существенно отличаются друг от друга по фильтрационным характеристикам, называются макронеоднородными.

Основные виды макронеоднородности:

- 1) слоистая неоднородность — пласт разделяется по толщине на несколько слоев, в каждом из которых проницаемость в среднем постоянна, но отлична от проницаемости соседних слоев;
- 2) зональная неоднородность, при которой пласт по площади состоит из нескольких зон с различной проницаемостью;
- 3) проницаемость является известной непрерывной функцией  $K(x,y,z)$  координат точек области фильтрации.



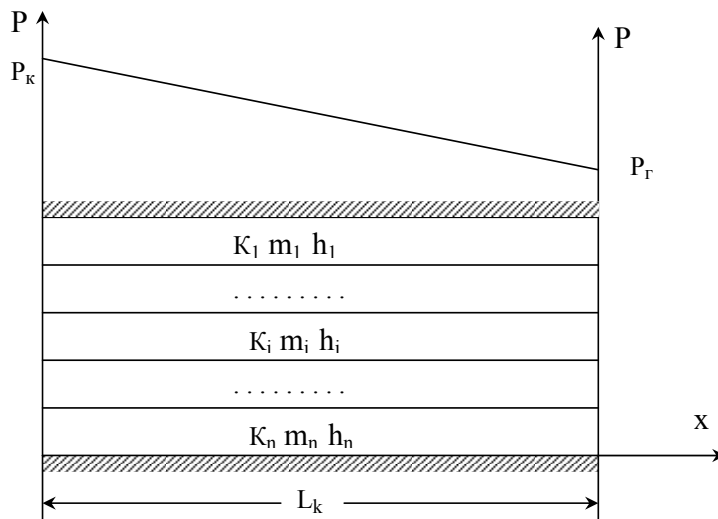
### 3.3.1. Прямолинейно-параллельный поток несжимаемой жидкости в неоднородных пластах

Характеристика	Слоисто-неоднородный пласт	Зонально-неоднородный пласт
Дебит потока	$Q = \sum_{i=1}^n Q_i =$ $= \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{\mu} \frac{P_k - P_e}{L_k} B h_i =$ $= \frac{B(P_k - P_e)}{\mu L_k} \sum_{i=1}^n K_i h_i$	$Q = \frac{K_i}{\mu} \frac{P_{i-1} - P_i}{l_i} B h =$ $= \frac{B h}{\mu} \frac{P_k - P_e}{\sum_{i=1}^n \frac{l_i}{K_i}}$
Закон распределения давления в пропластке (зоне)	$P = P_k - \frac{P_k - P_e}{L_k} x$	$P_i(x) = P_{i-1} - \frac{P_{i-1} - P_i}{l_i} x, \quad 0 \leq x \leq l_i$
Скорость фильтрации в пропластке (зоне)	$V_i = \frac{K_i}{\mu} \frac{P_k - P_e}{L_k}, \quad i = 1, 2, \dots, n$	$V = \frac{P_k - P_e}{\mu \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{K_i}}$
Градиент давления в пропластке (зоне)	$\frac{\partial P}{\partial x} = - \frac{P_k - P_e}{L_k}$	$\frac{\partial P_i}{\partial x} = - \frac{P_{i-1} - P_i}{l_i}$

Анализируя соотношения, можно отметить следующее.

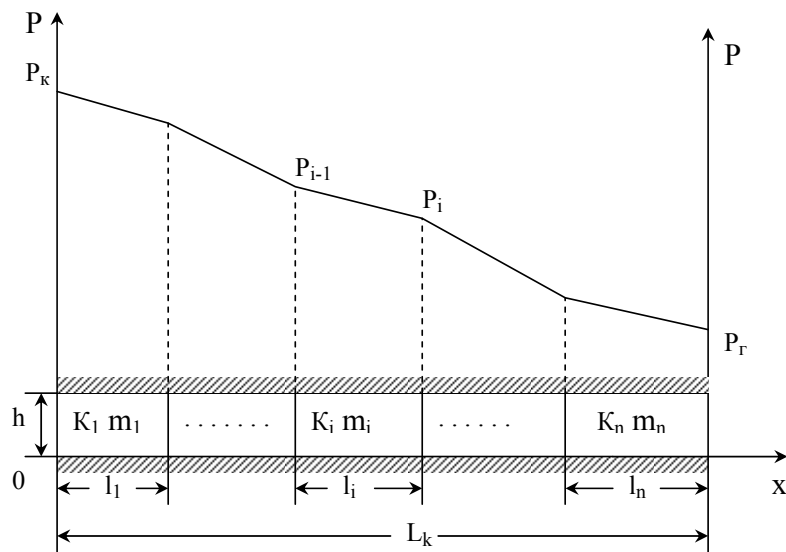
В слоисто-неоднородном пласте:

- а) при одном и том же значении координаты  $x$  давления в каждом пропластке одинаковы. Распределение давления в каждом пропластке линейно вдоль линии тока;
- б) градиент давления в каждом пропластке одинаков;
- в) скорость фильтрации в  $i$ -том пропластке своя, пропорциональная проницаемости пропластка  $K_i$ ;
- г) дебит потока равен сумме дебитов отдельных пропластков.



В зонально-неоднородном пласте:

- а) распределение давления в каждой зоне линейное;
- б) градиент давления в пределах каждой зоны постоянный, но разный в различных зонах;
- в) дебит потока несжимаемой жидкости в силу условия неразрывности постоянен в любом поперечном сечении потока;
- г) скорость фильтрации постоянна в любом поперечном сечении потока.



### 3.3.2. Плоскорадиальный поток несжимаемой жидкости в неоднородных пластах

Характеристика	Слоисто-неоднородный пласт	Зонально-неоднородный пласт
Дебит потока	$Q = \sum_{i=1}^n Q_i =$ $= \sum_{i=1}^n \frac{2\pi K_i h_i}{\mu} \frac{P_k - P_c}{\ln \frac{R_k}{R_c}} =$ $= \frac{2\pi}{\mu} \frac{P_k - P_c}{\ln \frac{R_k}{R_c}} \sum_{i=1}^n K_i h_i$	$Q = \frac{2\pi h}{\mu} \cdot \frac{P_k - P_c}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{K_i} \ln \frac{r_i}{r_{i-1}}} =$ $= \frac{2\pi K_i h}{\mu} \cdot \frac{P_i - P_{i-1}}{\ln \frac{r_i}{r_{i-1}}}$
Закон распределения давления в пропластке (зоне)	$P = P_k - \frac{P_k - P_c}{\ln \frac{R_k}{R_c}} \ln \frac{R_k}{r}$	$P_i(r) = P_i - \frac{P_i - P_{i-1}}{\ln \frac{r_i}{r_{i-1}}} \ln \frac{r_i}{r},$ $r_{i-1} \leq r \leq r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$
Скорость фильтрации в пропластке (зоне)	$V_i = \frac{K_i}{\mu} \cdot \frac{P_k - P_c}{\ln \frac{R_k}{R_c}} \cdot \frac{1}{r}$	$V = \frac{P_k - P_c}{\mu \sum_{i=1}^n \frac{1}{K_i} \ln \frac{r_i}{r_{i-1}}} \cdot \frac{1}{r}$
Градиент давления в пропластке (зоне)	$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{P_k - P_c}{\ln \frac{R_k}{R_c}} \cdot \frac{1}{r}$	$\frac{\partial P_i}{\partial r} = \frac{P_i - P_{i-1}}{\ln \frac{r_i}{r_{i-1}}} \cdot \frac{1}{r}$

Анализ данных соотношений аналогичен выполненному ранее. Разница состоит в законах изменения параметров по соответствующей координате. Так, в случае слоисто-неоднородного пласта для всех пропластков будет общей логарифмическая кривая распределения давления. В случае зонально-неоднородного пласта в каждой  $i$ -той зоне распределение давления также подчиняется логарифмическому закону.

### 3.4. Одномерные фильтрационные потоки несжимаемой жидкости при нелинейных законах фильтрации

#### Прямолинейно-параллельный поток

Нелинейный степенной закон фильтрации в данном случае принимает вид:

$$V = C \left( -\frac{dP}{dx} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{Q}{Bh}, \quad 1 \leq n \leq 2. \quad (3.1)$$

Определим дебит и распределение давления.

Для определения постоянного дебита  $Q$  разделим переменные в формуле (3.1) и проинтегрируем в пределах от  $P_\kappa$  до  $P_\varepsilon$  и от  $0$  до  $L_\kappa$ :

$$\int_{P_\kappa}^{P_\varepsilon} dP = - \left( \frac{Q}{CBh} \right)^n \int_0^{L_\kappa} dx,$$

откуда

$$Q = C \left( \frac{P_\kappa - P_\varepsilon}{L_\kappa} \right)^{\frac{1}{n}} Bh. \quad (3.2)$$

Интегрируя выражение (3.1) в пределах от  $P_\kappa$  до  $P$  и от  $0$  до  $x$ , найдем распределение давления:

$$P = P_\kappa - \left( \frac{Q}{CBh} \right)^n x$$

или, с учетом выражения (3.2):

$$P = P_\kappa - \frac{P_\kappa - P_\varepsilon}{L_\kappa} x \quad (3.3)$$

Таким образом, распределение давления при нелинейном законе фильтрации (3.1) совпадает с формулой распределения давления в аналогичном потоке при фильтрации по закону Дарси.

Скорость фильтрации равна:

$$V = -C \left( \frac{dP}{dx} \right)^{\frac{1}{n}} = C \left( \frac{P_\kappa - P_\varepsilon}{L_\kappa} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (3.4)$$

Скорость фильтрации постоянна во всем фильтрационном потоке.

#### Плоскорадиальный поток

Степенной закон фильтрации в данном случае принимает вид:

$$V = \frac{Q}{2\pi rh} = C \left( \frac{dP}{dr} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (3.5)$$

Отсюда

$$Q = 2\pi r h C \left( \frac{dP}{dr} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Разделив переменные и проинтегрировав в пределах от  $P_c$  до  $P_k$  и от  $R_c$  до  $R_k$ , получим:

$$Q = 2\pi h C \left[ \frac{(n-1)(P_k - P_c)}{\left( \frac{1}{R_c} \right)^{n-1} - \left( \frac{1}{R_k} \right)^{n-1}} \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (3.6)$$

В предельном случае при  $n=2$  (закон Краснопольского) из уравнения (3.6) имеем:

$$Q = 2\pi h C \sqrt{\frac{P_k - P_c}{\frac{1}{R_c} - \frac{1}{R_k}}}.$$

Пренебрегая величиной  $\frac{1}{R_k}$  по сравнению с  $\frac{1}{R_c}$ , получим:

$$Q = 2\pi h C \sqrt{R_c (P_k - P_c)}. \quad (3.7)$$

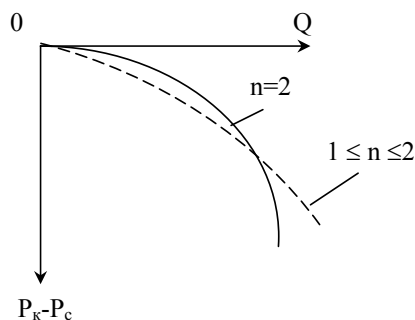
Интегрируя выражение (3.5) в пределах от  $P_k$  до  $P$  и от  $R_k$  до  $r$ , найдем распределение давления в потоке:

$$P = P_k - \frac{P_k - P_c}{\frac{1}{R_c^{n-1}} - \frac{1}{R_k^{n-1}}} \left( \frac{1}{r^{n-1}} - \frac{1}{R_k^{n-1}} \right). \quad (3.8)$$

При  $n=2$

$$P = P_k - \frac{P_k - P_c}{\frac{1}{R_c} - \frac{1}{R_k}} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_k} \right). \quad (3.9)$$

Как видно из формулы (3.6), индикаторная линия при  $1 \leq n \leq 2$  будет иметь вид выпуклой к оси дебитов степенной кривой с дробным показателем степени. В случае выполнения закона Краснопольского индикаторная линия является параболой второго порядка.



Кривая распределения давления в плоскорадиальном потоке при нелинейном законе фильтрации, как видно из формулы (3.8), имеет форму гиперболы. Воронка депрессии является гиперболоидом вращения, и ее крутизна у стенки скважины будет больше, чем у логарифмической кривой.

В реальных условиях при небольших дебитах скважины фильтрация может происходить по линейному закону. С увеличением дебита вблизи забоя скважины начинается нарушение линейного закона фильтрации. По мере увеличения дебита область потока, в которой нарушен закон Дарси, будет расширяться. В этих случаях удобно использовать двучленный закон фильтрации:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{\mu}{K} V + bV^2, \quad (3.10)$$

где  $b = \frac{\beta \rho}{\sqrt{K}}$ .

Выражая скорость фильтрации  $V$  через дебит  $Q$

$$V = \frac{Q}{2\pi rh},$$

разделяя переменные и интегрируя в соответствующих пределах, находим:

а) распределение давления в пласте:

$$P = P_k - \frac{Q\mu}{2\pi Kh} \ln \frac{R_k}{r} - \frac{bQ^2}{(2\pi h)^2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_k} \right);$$

б) дебит скважины

$$P_k - P_c = \frac{Q\mu}{2\pi Kh} \ln \frac{R_k}{R_c} + \frac{bQ^2}{(2\pi h)^2} \left( \frac{1}{R_c} - \frac{1}{R_k} \right).$$

Дебит  $Q$  находится как положительный корень квадратного уравнения, из которого видно, что индикаторная линия в этом случае является параболой.

### **Контрольные вопросы:**

9. Охарактеризуйте типы одномерных фильтрационных потоков.
10. Проанализируйте расчетные зависимости для определения характеристик прямолинейно-параллельного потока.
11. Проанализируйте расчетные зависимости для определения характеристик плоскорадиального потока.
12. Дайте определение коэффициента продуктивности скважины.
13. Охарактеризуйте основные виды макроеднородности пластов.
14. Сравните и проанализируйте основные характеристики фильтрационных потоков в слоисто-неоднородном и зонально-неоднородном пластах.
15. Постройте схемы распределения давления в плоскорадиальном потоке жидкости для слоисто-неоднородного и зонально-неоднородного пластов.
16. Сопоставьте выражения для определения дебита и давления в случаях соблюдения и нарушения закона Дарси. Отдельно рассмотрите прямолинейно-параллельный и плоскорадиальный потоки.

## **4. ПЛОСКИЕ УСТАНОВИВШИЕСЯ ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ПОТОКИ. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СКВАЖИН**

### **4.1. Потенциал скорости фильтрации**

Обычно продуктивные пласты эксплуатируются группой скважин. В этом случае под влиянием пуска, остановки или изменения режима работы одной группы скважин изменяются дебиты и забойные давления другой группы скважин, эксплуатирующих тот же пласт. Подобное явление называется явлением **интерференции** (взаимодействия).

Для оценки взаимодействия скважин и решения сложных гидродинамических задач используются свойства уравнения Лапласа, приводящие к принципу суперпозиции:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0 .$$

В теории фильтрации вводится функция  $\Phi(x,y,z)$ , называемая **потенциалом скорости фильтрации**:

$$\Phi = \frac{K}{\mu} (P + \rho g z) . \quad (4.1)$$

Если подставить  $\Phi$  в уравнения движения

$$V_x = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad V_y = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y}, \quad V_z = -\frac{K}{\mu} \left( \frac{\partial P}{\partial z} + \rho g \right),$$

то их можно записать в виде:

$$V_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad V_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad V_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (4.2)$$

Таким образом, потенциалом скорости фильтрации называется функция, производная которой с обратным знаком вдоль линии тока равна скорости фильтрации.

Потенциал скорости фильтрации  $\Phi$ , так же как и давление  $P$ , удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (4.3)$$

#### 4.2. Точечный источник и сток

**Точечным источником** называют точку на плоскости, поглощающую жидкость (модель нагнетательной скважины бесконечно малого радиуса).

**Точечным стоком** называют точку на плоскости, отдающую жидкость (модель добывающей скважины бесконечно малого радиуса).

На плоскости вокруг стока (источника) будет плоскорадиальное движение. Тогда скорость фильтрации запишется в виде:

$$V = \frac{Q}{2\pi rh} = \frac{d\Phi}{dr},$$

откуда

$$d\Phi = \frac{Q}{2\pi h} \cdot \frac{dr}{r}.$$

После интегрирования получим выражение потенциала для точечного стока на плоскости:

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi h} \ln r + C, \quad (4.4)$$

где  $C$  – постоянная интегрирования.

Для точечного источника:

$$\Phi = -\frac{Q}{2\pi h} \ln r + C.$$

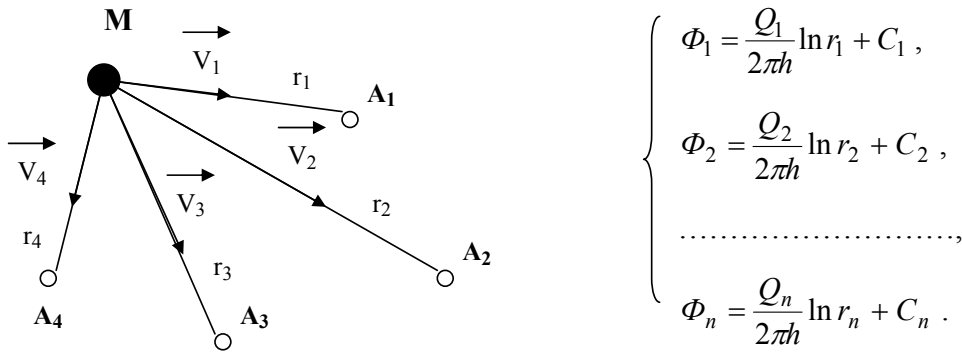
Метод источников-стоков широко используется также в задачах теории теплопроводности, электричества и магнетизма.



### 4.3. Принцип суперпозиции

Гидродинамический смысл принципа суперпозиции заключается в следующем.

При совместной работе в пласте нескольких скважин результирующий потенциал в любой точке пласта  $M$  равен алгебраической сумме потенциалов  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ , обусловленных работой каждой отдельной скважины.



$$\Phi_M = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_n = \frac{1}{2\pi h} \sum_{i=1}^n Q_i \ln r_i + C, \quad (4.5)$$

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n.$$

Каждая из функций  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$  удовлетворяет уравнению Лапласа. Сумма потенциалов  $\Phi_M$  также удовлетворяет уравнению Лапласа.

Физически это означает, что фильтрационные потоки от работы каждого источника или стока накладываются друг на друга. В этом и заключается принцип суперпозиции, или сложения течений.

Скорости фильтрации при этом складываются геометрически.

$$\vec{V}_M = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4 ,$$

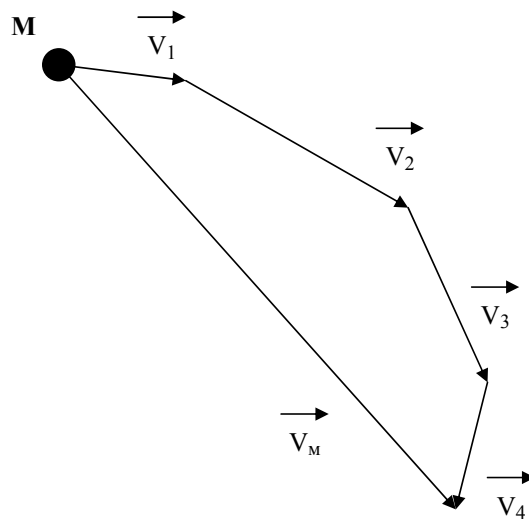
где

$$V_1 = \frac{Q_1}{2\pi r_1 h} ,$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{2\pi r_2 h} ,$$

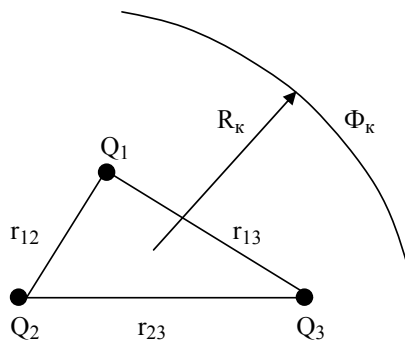
$$V_3 = \frac{Q_3}{2\pi r_3 h} ,$$

$$V_4 = \frac{Q_4}{2\pi r_4 h} .$$



Используя принцип суперпозиции, можно приближенно рассчитывать дебиты или потенциалы (а значит, забойные давления) для небольших групп скважин.

#### 4.4. Приток жидкости к группе скважин в пласте с удаленным контуром питания



Пусть горизонтальный пласт с постоянной толщиной  $h$  эксплуатируется тремя скважинами. Дебиты скважин  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  известны. Каждая скважина имеет радиус  $R_c$ . Расстояние от каждой скважины до удаленного контура питания можно принять одинаковым, равным  $R_k$ . Потенциал  $\Phi_k$  на контуре питания известен.

Требуется определить давления на забоях скважин.

Поступают следующим образом.

Мысленно помещают условную точку  $M$  последовательно на забой каждой скважины и записывают выражения для забойных потенциалов, которые связаны с забойными давлениями согласно (4.1).

$$\begin{cases} \Phi_{c1} = \frac{1}{2\pi h} (Q_1 \ln R_c + Q_2 \ln r_{12} + Q_3 \ln r_{13}) + C, \\ \Phi_{c2} = \frac{1}{2\pi h} (Q_1 \ln r_{12} + Q_2 \ln R_c + Q_3 \ln r_{23}) + C, \\ \Phi_{c3} = \frac{1}{2\pi h} (Q_1 \ln r_{13} + Q_2 \ln r_{23} + Q_3 \ln R_c) + C, \end{cases}$$

Система состоит из трех уравнений и содержит 4 неизвестных – потенциалы на забоях скважин и постоянную интегрирования  $C$ .

Необходимо получить дополнительное уравнение. Для этого мысленно помещают точку  $M$  на контур питания и записывают выражение потенциала  $\Phi_k$ :

$$\Phi_k = \frac{1}{2\pi h} (Q_1 \ln R_k + Q_2 \ln R_k + Q_3 \ln R_k) + C.$$

Из полученного уравнения поочередно вычитают каждое из уравнений системы:

$$\begin{cases} \Phi_k - \Phi_{c1} = \frac{1}{2\pi h} \left( Q_1 \ln \frac{R_k}{R_c} + Q_2 \ln \frac{R_k}{r_{12}} + Q_3 \ln \frac{R_k}{r_{13}} \right), \\ \Phi_k - \Phi_{c2} = \frac{1}{2\pi h} \left( Q_1 \ln \frac{R_k}{r_{12}} + Q_2 \ln \frac{R_k}{R_c} + Q_3 \ln \frac{R_k}{r_{23}} \right), \\ \Phi_k - \Phi_{c3} = \frac{1}{2\pi h} \left( Q_1 \ln \frac{R_k}{r_{13}} + Q_2 \ln \frac{R_k}{r_{23}} + Q_3 \ln \frac{R_k}{R_c} \right). \end{cases}$$

Далее, используя выражение (4.1) для горизонтального пласта, рассчитывают давления на забоях скважин.

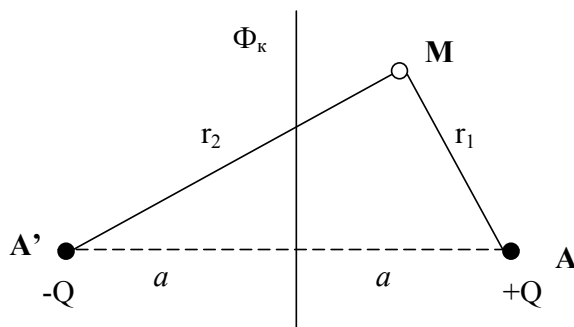
Принцип суперпозиции можно использовать не только в бесконечных пластах, но и в пластах, имеющих приближенный контур питания той или иной формы, либо непроницаемую границу. В этом случае вводятся фиктивные скважины-стоки или скважины-источники за пределами пласта и рассматривается их совместная работа с реальными скважинами. Это – метод отображения источников-стоков.

#### 4.5. Приток жидкости к скважине в пласте с прямолинейным контуром питания

Пусть в полубесконечном пласте с прямолинейным контуром питания, на котором потенциал равен  $\Phi_k$ , работает одна добывающая скважина  $A$  с забойным потенциалом  $\Phi_c$ . Необходимо найти дебит скважины  $Q$ .

Поступают следующим образом.

Отображают зеркально скважину-сток  $A$  относительно контура питания и дебиту скважины-отображения  $A'$  приписывают противоположный знак, то есть считают ее скважиной-источником.



Потенциал в любой точке пласта  $M$  равен:

$$\Phi_M = \frac{+Q}{2\pi h} \ln r_1 + \frac{-Q}{2\pi h} \ln r_2 + C = \frac{Q}{2\pi h} \ln \frac{r_1}{r_2} + C.$$

Потенциал на контуре питания  $\Phi_k = C$ , поскольку для точки, помещенной на контур питания,  $r_1 = r_2$ .

Потенциал на забое скважины  $A$  равен:

$$\Phi_c = \frac{+Q}{2\pi h} \ln R_c + \frac{-Q}{2\pi h} \ln 2a + C = \frac{Q}{2\pi h} \ln \frac{R_c}{2a} + \Phi_k = \Phi_k - \frac{Q}{2\pi h} \ln \frac{2a}{R_c}.$$

Отсюда выразим дебит скважины  $A$ :

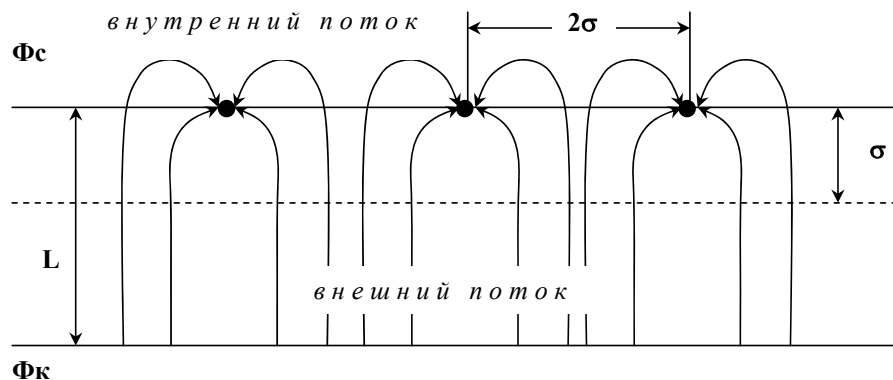
$$Q = \frac{2\pi h(\Phi_k - \Phi_c)}{\ln \frac{2a}{R_c}} = \frac{2\pi Kh(P_k - P_c)}{\mu \ln \frac{2a}{R_c}}.$$

#### 4.6. Приток жидкости к прямолинейным цепочкам и кольцевым батареям скважин. ЭГДА. Метод эквивалентных фильтрационных сопротивлений

Метод эквивалентных фильтрационных сопротивлений предложен Ю.П.Борисовым и основан на аналогии движения жидкости в пористой среде с течением электрического тока в проводниках.

Рассмотрим приток жидкости к прямолинейной цепочке скважин, расположенных на расстоянии  $2\sigma$  друг от друга и на расстоянии  $L$  от контура питания. Пусть на контуре питания задан постоянный потенциал  $\Phi_k$ , на забоях скважин – потенциалы  $\Phi_c$ .

Для нахождения дебитов скважин цепочка скважин-стоков отображается зеркально относительно контура питания в скважины-источники, и рассматривается интерференция двух цепочек скважин в неограниченном пласте.



Результаты решения показывают, что на расстоянии от контура питания до половины расстояния между скважинами движение жидкости практически прямолинейное, и падение потенциала (давления) на этом участке происходит по закону прямолинейной фильтрации. Вблизи каждой скважины характер движения близок к плоскорадиальному.

При этом дебит каждой скважины цепочки выражается зависимостью:

$$Q = \frac{2\pi h(\Phi_k - \Phi_c)}{\frac{\pi L}{\sigma} + \ln \frac{\sigma}{\pi R_c}} = \frac{2\pi K h(P_k - P_c)}{\mu l \left( \frac{\pi L}{\sigma} + \ln \frac{\sigma}{\pi R_c} \right)}. \quad (4.6)$$

Выражение дебита по структуре аналогично формуле Дюпюи, но знаменатель содержит два слагаемых, первое из которых характеризует внешний (прямолинейно-параллельный) поток, а второе – внутренний (плоскорадиальный) поток.

Введем обозначения:

$$\frac{L}{2\sigma h} = \Omega, \quad \frac{1}{2\pi h} \ln \frac{\sigma}{\pi R_c} = \omega.$$

Представим формулу (4.6) в виде:

$$Q = \frac{\Phi_k - \Phi_c}{\Omega + \omega}. \quad (4.7)$$

Эта формула аналогична закону Ома. Величина  $\Omega$  по терминологии Ю.П.Борисова называется внешним фильтрационным сопротивлением,  $\omega$  – внутренним фильтрационным сопротивлением.

#### **ЭГДА (электродинамическая аналогия)**

Аналогия между гидродинамическими и электрическими процессами проявляется в следующем:

- 1) изменение напряжения между узлами электрической сетки аналогично распределению давления в пласте:

$$U_1 - U_2 \equiv P_1 - P_2 \quad \text{или} \quad \Delta U \equiv \Delta P;$$

- 2) электрическое сопротивление участка электрической сетки пропорционально (аналогично) гидродинамическому сопротивлению участка моделируемого пласта:

$$R_{\text{э}} \equiv \Omega + \omega;$$

- 3) сила тока, протекающего между узлами сетки, пропорциональна (аналогична) количеству жидкости, протекающей через участок моделируемого пласта:

$$I \equiv Q'.$$

При этом справедлив закон Кирхгофа, согласно которому суммарное падение напряжения в сети равно сумме падений напряжений на отдельных участках:

$$\Delta U = \sum_i^n I \cdot R_i ,$$

$$\Delta P = \sum_i^n Q'(\Omega + \omega) .$$

С помощью метода эквивалентных фильтрационных сопротивлений Ю.П.Борисова и ЭГДА легко составить уравнения для расчета дебитов и давлений на забоях скважин, расположенных в виде прямолинейных цепочек или кольцевых батарей.

На схеме 1 изображен полубесконечный пласт с прямолинейным односторонним контуром питания, который разрабатывается двумя параллельными цепочками скважин с числом скважин в каждой  $n_1$  и  $n_2$ . Скважины в каждой цепочке имеют одинаковые радиусы  $R_{c1}$ ,  $R_{c2}$  и забойные давления  $P_{c1}$  и  $P_{c2}$ . Суммарные дебиты цепочек (рядов) составляют  $Q_1'$  и  $Q_2'$ .

На схеме 2 показаны две кольцевые батареи скважин, эксплуатирующие пласт с круговым контуром питания. Радиус контура питания  $R_k$ , радиусы батарей – соответственно  $R_1$  и  $R_2$ .

Оба случая рассчитываются с помощью одной и той же схемы эквивалентных фильтрационных сопротивлений, показанной на рисунке.

Схема 1

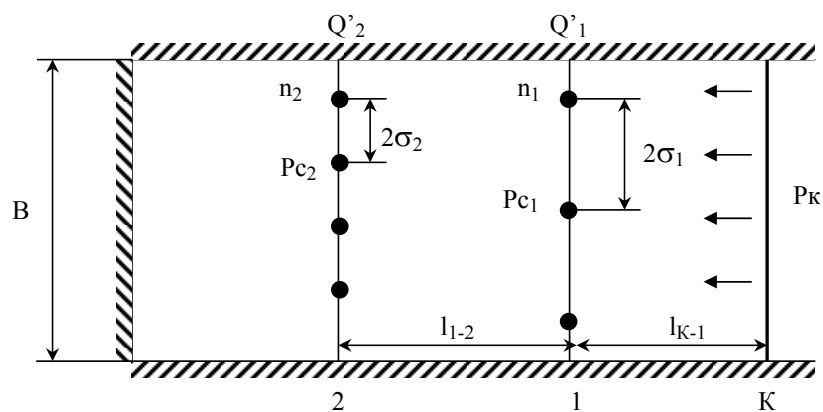


Схема 2

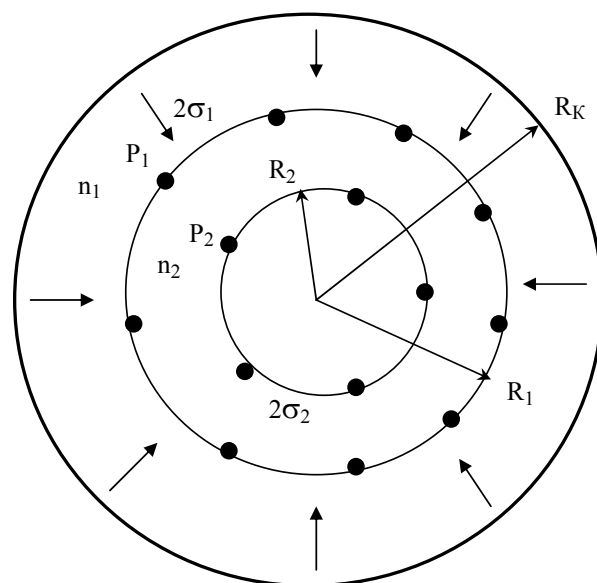
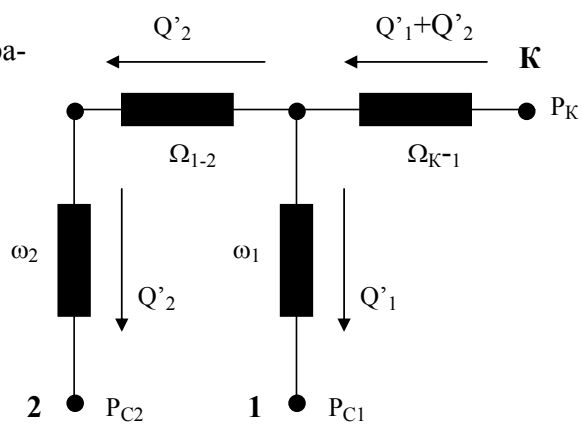


Схема эквивалентных фильтрационных сопротивлений





Согласно закону Кирхгофа, запишем в гидродинамических символах систему уравнений, мысленно перемещаясь вдоль условного контура из точки **K** в точку **1**, а затем – из точки **1** в точку **2**:

$$\begin{cases} P_K - P_{c1} = (Q_1' + Q_2') \cdot \Omega_{K-1} + Q_1' \omega_1, \\ P_{c1} - P_{c2} = -Q_1' \cdot \omega_1 + Q_2' \cdot \Omega_{1-2} + \omega_2 \cdot Q_2'. \end{cases} \quad (4.8)$$

При этом **внешние фильтрационные сопротивления** будут равны:

для схемы 1

$$\Omega_{K-1} = \frac{\mu l_{R-1}}{Bkh}, \quad \Omega_{1-2} = \frac{\mu l_{1-2}}{Bkh};$$

для схемы 2

$$\Omega_{K-1} = \frac{\mu}{2\pi kh} \ln \frac{R_K}{R_1}, \quad \Omega_{1-2} = \frac{\mu}{2\pi kh} \ln \frac{R_1}{R_2}.$$

**Внутренние фильтрационные сопротивления** в обоих случаях определяются по формулам:

$$\omega_1 = \frac{\mu}{2\pi kh n_1} \ln \frac{\sigma_1}{\pi R_{c1}}, \quad \omega_2 = \frac{\mu}{2\pi kh n_2} \ln \frac{\sigma_2}{\pi R_{c2}}.$$

Непосредственно из системы уравнений (4.8) можно определить дебиты рядов скважин  $Q_1'$  и  $Q_2'$ , если заданы забойные давления, или забойные давления  $P_{c1}$  и  $P_{c2}$ , если заданы дебиты скважин.

### **Контрольные вопросы:**

17. Что такое интерференция скважин?
18. Дайте определение потенциала скорости фильтрации. Приведите выражение потенциала точечного стока (источника).
19. В чем заключается математический, гидродинамический и физический смысл принципа суперпозиции?
20. Приведите систему уравнений для определения дебитов группы скважин в пласте с удаленным контуром питания.
21. Выведите формулу для определения дебита скважины, расположенной вблизи непроницаемой границы.

22. В чем заключается принцип ЭГДА?
23. Что такое внутреннее и внешнее фильтрационное сопротивление?
24. Составьте схему эквивалентных фильтрационных сопротивлений и систему уравнений для расчета дебитов скважин, расположенных в виде трех кольцевых батарей в пласте с круговым контуром питания.

## 5. ПРИТОК К НЕСОВЕРШЕННЫМ СКВАЖИНАМ

### 5.1. Виды гидродинамического несовершенства скважин

В теории фильтрации различают три вида несовершенства скважины:

- 1) скважина гидродинамически несовершенная по степени вскрытия пласта – это скважина с открытым забоем, вскрывшая пласт не на всю толщину;
- 2) скважина гидродинамически несовершенная по характеру вскрытия пласта – это скважина, вскрывшая пласт на всю толщину, но сообщающаяся с пластом через систему перфорационных отверстий или специальные фильтры;
- 3) скважина гидродинамически несовершенная как по степени, так и по характеру вскрытия.

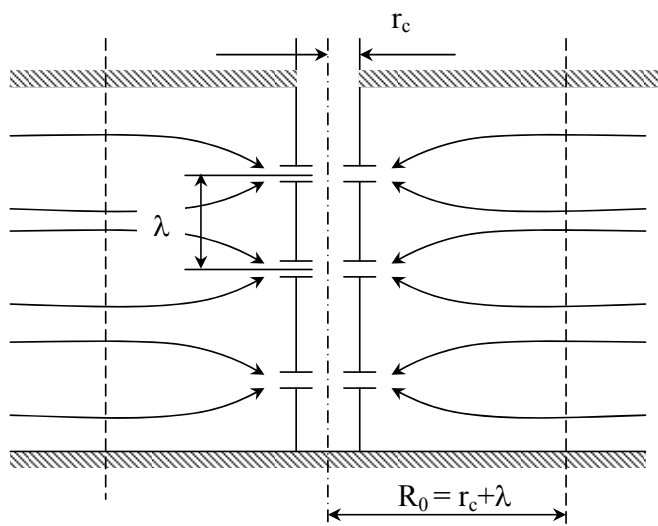


Рис. 5.1. Схема притока к скважине, несовершенной по характеру вскрытия

$\lambda$  - расстояние между отверстиями вдоль оси скважины;  
 $r_c$  - радиус гидродинамически несовершенной скважины.

Скважина, несовершенная по характеру вскрытия, сообщается с пластом через систему перфорационных отверстий. Вблизи отверстий форма потока радиально-сферическая. Суммарная площадь фильтрации определяется суммой

сечений отверстий, что значительно меньше поверхности вскрытого пласта. Это приводит к возникновению дополнительных сопротивлений в призабойной зоне пласта. Исследования показывают, что за пределами цилиндрической поверхности радиуса  $R_0 = r_c + \lambda$  линии тока практически параллельны, и поток становится плоскорадиальным.

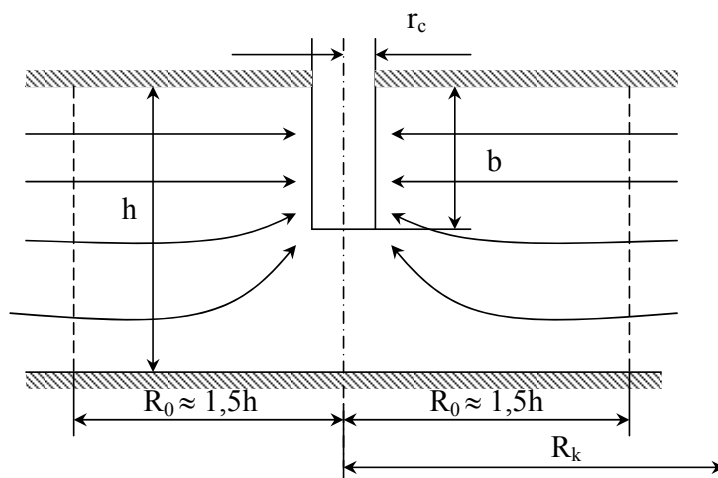


Рис. 5.2. Схема притока к скважине, несовершенной по степени вскрытия

Если скважина гидродинамически несовершенна по степени вскрытия. То линии тока будут параллельны за пределами цилиндрической поверхности радиуса  $R_0 \approx 1,5h$ . В зоне, прилегающей к скважине, поток жидкости вблизи кровли пласта будет плоскорадиальным, а в остальной части – радиально-сферическим.

## 5.2. Формулы притока жидкости к несовершенным скважинам

Дебит скважины, несовершенной *по степени вскрытия*, можно найти по формуле Н.К.Гиринского, если считать, что скважина вскрыла пласт неограниченной толщины на глубину  $b$ :

$$Q = \frac{2\pi K b}{\mu} \frac{P_k - P_c}{\ln \frac{1,6b}{r_c}}. \quad (5.1)$$

Для пласта конечной толщины  $h$  М.Маскет предложил формулу, при условии, что  $R_k \geq \frac{1}{2}h$ :

$$Q = \frac{2\pi K h}{\mu} \frac{P_k - P_c}{\xi}, \quad (5.2)$$

где

$$\xi = \frac{1}{2\bar{h}} \left[ 2 \ln \frac{4h}{r_c} - \varphi(\bar{h}) \right] + \ln \frac{4h}{R_k}.$$

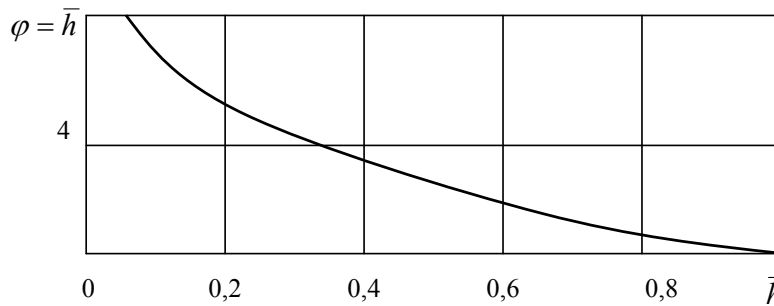
Здесь  $\bar{h} = \frac{b}{h}$  - относительное вскрытие пласта.

Функция  $\varphi = \bar{h}$  имеет следующее аналитическое выражение:

$$\varphi(\bar{h}) = \ln \frac{\Gamma(0,875\bar{h})\Gamma(0,125\bar{h})}{\Gamma(1-0,875\bar{h})\Gamma(1-0,125\bar{h})},$$

где  $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$  - интеграл Эйлера второго рода, называемый гамма-функцией, для которой имеются таблицы в математических справочниках.

График функции  $\varphi = \bar{h}$  имеет вид:



Иногда для расчета дебита скважины, несовершенной по степени вскрытия, используется более простая формула, чем формула М.Маскета, - формула И.Козени:

$$Q = \frac{2\pi K h \bar{h} (P_k - P_c)}{\mu \ln \frac{R_k}{r_c}} \left( 1 + 7 \sqrt{\frac{r_c}{2h\bar{h}}} \cos \frac{\pi \bar{h}}{2} \right). \quad (5.3)$$

Для дебита скважины, вскрывшей пласт на малую глубину ( $b \ll h$ ), существует формула И.А.Чарного:

$$Q = \frac{2\pi(\Phi_k - \Phi_c)}{\frac{1}{h} \ln \frac{R_k}{R_0} + \frac{1}{r_c}} = \frac{2\pi K h (P_k - P_c)}{\mu \left( \frac{1}{h} \ln \frac{R_k}{R_0} + \frac{1}{r_c} \right)}.$$

Принимая  $R_0 = 1,5h$ , окончательно имеем:

$$Q = \frac{2\pi(\Phi_k - \Phi_c)}{\frac{1}{h} \ln \frac{R_k}{1,5h} + \frac{1}{r_c}} = \frac{2\pi Kh(P_k - P_c)}{\mu \left( \frac{1}{h} \ln \frac{R_k}{1,5h} + \frac{1}{r_c} \right)}. \quad (5.4)$$

Дебит скважины, сочетающей *оба вида несовершенства*, можно определить по формуле:

$$Q = \frac{2\pi Kh(P_k - P_c)}{\mu \left( \frac{1}{h} \ln \frac{R_k}{r_c} + C \right)}, \quad (5.5)$$

где  $C = C_1 + C_2$  – дополнительное фильтрационное сопротивление, вызванное несовершенством скважины по степени вскрытия ( $C_1$ ) и по характеру вскрытия ( $C_2$ ).

$C$  – величина безразмерная.

Значения  $C_1$  и  $C_2$  находятся по графикам В.И.Щурова, общий вид которых представлен на рис. 5.3, 5.4.

$C_1$  находится с помощью параметров:

$$a = \frac{h}{D_c} \quad \text{и} \quad \bar{h} = \frac{b}{h}.$$

$C_2$  находится с помощью параметров:

$$l = \frac{l'}{D_c}, \quad \alpha = \frac{d_0}{D_c} \quad \text{и} \quad nD_c,$$

где  $n$  – число перфорационных отверстий на 1 м длины колонны;  $D_c$  – диаметр скважины, м;  $l'$  – глубина перфорационного отверстия, м;  $d_0$  – диаметр отверстия, м.

Формулу (5.5) можно записать в виде:

$$Q = \frac{2\pi Kh(P_k - P_c)}{\mu \left( \frac{1}{h} \ln \frac{R_k}{\bar{r}_c} \right)},$$

где  $\bar{r}_c$  – приведенный радиус скважины, т.е. радиус такой гидродинамически совершенной скважины, дебит которой равен дебиту данной несовершенной скважины.

$$\bar{r}_c = r_c e^{-C}.$$

Значения приведенного радиуса обычно составляют  $(10^{-2} \div 10^{-4})$  м.

Иногда гидродинамическое несовершенство скважины учитывается при помощи коэффициента совершенства  $\delta$ :

$$\delta = \frac{Q}{Q_{сов}} = \frac{\ln \frac{R_k}{r_c}}{\ln \frac{R_k}{r_c} + C},$$

где  $Q$  – дебит несовершенной скважины;  $Q_{сов}$  – дебит совершенной скважины в тех же условиях.

### 5.3. Несовершенство по качеству вскрытия

В практике разработки выделяют еще один вид несовершенства – по качеству вскрытия, когда проницаемость призабойной зоны скважины (ПЗС) снижена по сравнению с естественной проницаемостью пласта.

С учетом данного вида несовершенства формула Дюпюи приобретает вид:

$$Q = \frac{2\pi Kh(P_k - P_c)}{\mu \left( \frac{1}{h} \ln \frac{R_k}{r_c} + C + S \right)}, \quad (5.6)$$

где  $S = S_1 + S_2$ . Здесь  $S_1$  – коэффициент, учитывающий дополнительные фильтрационные сопротивления в ПЗС из-за несовершенства скважины по качеству первичного вскрытия (загрязнение пласта фильтратом бурового раствора, цементным раствором и т.п.);  $S_2$  – коэффициент, учитывающий дополнительные фильтрационные сопротивления в ПЗС из-за несовершенства скважины по качеству вторичного вскрытия (возникновение зоны коагуляции вокруг перфорационных каналов).

Коэффициент совершенства в этом случае равен:

$$\delta = \frac{\ln \frac{R_k}{r_c}}{\ln \frac{R_k}{r_c} + C + S}. \quad (5.7)$$

Величины  $C$  и особенно  $S$  трудно поддаются определению. Однако знаменатель формулы (5.7) можно определить с помощью промысловых гидродинамических исследований скважин.

По индикаторной диаграмме определяется коэффициент продуктивности несовершенной скважины, который характеризует всю зону дренирования от контура питания до стенки скважины:

$$\eta = \frac{Q}{\Delta P} = \frac{2\pi Kh}{\mu \left( \ln \frac{R_k}{r_c} + C + S \right)} = \frac{2\pi \varepsilon}{\ln \frac{R_k}{r_c} + C + S}. \quad (5.8)$$

Здесь  $\varepsilon = Kh/\mu$  - гидропроводность пласта, характеризующая зону с естественной проницаемостью, т.е. зону пласта за пределами проникновения технологических жидкостей. Значение  $\varepsilon$  определяется по кривой восстановления давления.

Из уравнения (5.8) следует:

$$\ln \frac{R_k}{r_c} + C + S = \frac{2\pi\varepsilon}{\eta}. \quad (5.9)$$

#### **Контрольные вопросы:**

25. Перечислите и охарактеризуйте виды гидродинамического несовершенства скважины.

26. Какими способами можно определить дебит скважины, несовершенной по степени вскрытия?

27. Как определить дебит несовершенной скважины с помощью графиков В.И.Щукова?

28. Что такое приведенный радиус и коэффициент совершенства скважины?

29. Как с помощью промысловых гидродинамических исследований учесть несовершенство скважины по качеству вскрытия?

## **6. НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ В УПРУГОЙ (ДЕФОРМИРУЕМОЙ) ПОРИСТОЙ СРЕДЕ**

### **6.1. Упругий режим пласта и его особенности**

При пуске скважин в эксплуатацию, при их остановке, при изменении темпа добычи жидкости из скважин в пласте возникают неустановившиеся процессы, которые проявляются в постепенном перераспределении пластового давления вокруг скважины, в изменении с течением времени дебитов, скоростей фильтрации и т.д.

Особенности этих процессов зависят от упругих свойств пластов и насыщающих их жидкостей, т.е. основной формой пластовой энергии в этих процессах является энергия упругой деформации жидкостей (нефти и воды) и материала пласта.

При этом предполагается, что фильтрационный поток однофазный, т.е. давление в любой точке потока выше давления насыщения.

При снижении пластового давления объем сжатой жидкости увеличивается, а объем порового пространства сокращается за счет расширения материала пласта. Все это способствует вытеснению жидкости из пласта в скважину.

Характерными особенностями упругого режима являются:

- 1) длительные (неустановившиеся) процессы перераспределения давления в пласте;
- 2) изменение упругого запаса жидкости в пласте.

## 6.2. Подсчет упругого запаса жидкости в пласте

Под упругим запасом жидкости в пласте понимается количество жидкости, которое можно извлечь из пласта при снижении давления в нем за счет объемной упругости пласта и насыщающих его жидкостей.

Обозначим изменение упругого запаса жидкости  $\Delta V_z$  при изменении давления во всех точках пласта на величину  $\Delta P$ . Тогда:

$$\Delta V_z = \Delta V_{жс} + \Delta V_n, \quad (6.1)$$

где  $\Delta V_{жс}$  – приращение объема жидкости при снижении давления в пласте;

$\Delta V_n$  – изменение объема порового пространства при снижении давления в пласте.

Слагаемые  $\Delta V_{жс}$  и  $\Delta V_n$  вычисляются по формулам:

$$\Delta V_{жс} = \beta_{жс} V_{жс} \Delta P, \quad (6.2)$$

$$\Delta V_n = \beta_c V_n \Delta P, \quad (6.3)$$

где  $\beta_{жс}, \beta_c$  – коэффициенты объемной упругости (сжимаемости) соответственно жидкости и материала среды;  $\Delta P$  – изменение давления, взятое по абсолютной величине.

Коэффициент объемной упругости жидкости  $\beta_{жс}$  характеризует податливость жидкости изменению ее объема и показывает, на какую часть первоначального объема изменяется объем жидкости при изменении давления на единицу:

$$\beta_{жс} = -\frac{1}{V_{жс}} \frac{dV_{жс}}{dP} \quad \text{– закон сжимаемости.} \quad (6.4)$$

Знак минус указывает на то, что объем жидкости  $V_{жс}$  увеличивается с уменьшением давления.



Для различных нефтей отечественных месторождений  $\beta_n = (7 \div 30) \cdot 10^{-10} \text{ л/Па}$ ; для пластовых вод  $\beta_e = (2,7 \div 5) \cdot 10^{-10} \text{ л/Па}$ ; для пород, слагающих продуктивные пласты,  $\beta_c = (0,3 \div 2) \cdot 10^{-10} \text{ л/Па}$ .

В соответствии с формулами (6.2) и (6.3) изменение упругого запаса  $\Delta V_z$  запишется в виде:

$$\Delta V_z = \beta_{жс} V_{жс} \Delta P + \beta_c V_n \Delta P. \quad (6.5)$$

Учитывая, что начальный объем жидкости, насыщающей пласт объемом  $V_n$ , равен начальному объему пор пласта, имеем:

$$V_{жс} = m V_n, \quad (6.6)$$

где  $m$  – коэффициент пористости.

С учетом равенства (6.6) формулу (6.5) перепишем в виде:

$$\Delta V_z = (m \beta_{жс} + \beta_c) \cdot V_n \Delta P$$

или

$$\Delta V_z = \beta^* V_n \Delta P, \quad (6.7)$$

где  $\beta^* = m \beta_{жс} + \beta_c$  – коэффициент упругоэластичности пласта.

Коэффициент упругоэластичности  $\beta^*$  численно равен изменению упругого запаса жидкости в единице объема пласта при изменении в нем давления на единицу.

### 6.3. Дифференциальное уравнение фильтрации упругой жидкости в упругой среде

Общее дифференциальное уравнение неуставившейся фильтрации сжимаемой жидкости по закону Дарси в деформируемой пористой среде при  $K = \text{const}$  и  $\mu = \text{const}$  было рассмотрено выше и имеет вид:

$$\frac{K}{\mu} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_0 \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho_0 \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho_0 \frac{\partial P}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial(\rho m)}{\partial t}. \quad (6.8)$$

Используем уравнения состояния упругой жидкости и упругой пористой среды:

$$\rho = \rho_0 [1 + \beta_{жс} (P - P_0)], \quad (6.9)$$

$$m = m_0 + \beta_c (P - P_0) . \quad (6.10)$$

Перемножая уравнения (6.9) и (6.10), получим:

$$m\rho = m_0\rho_0 + (m_0\rho_0\beta_{жс} + \rho_0\beta_c)(P - P_0) + \rho_0\beta_c\beta_{жс}(P - P_0)^2 .$$

Последним слагаемым можно пренебречь. Тогда, учитывая, что  $\beta^* = m_0\beta_{жс} + \beta_c$ , получаем:

$$m\rho = m_0\rho_0 \left[ 1 + \frac{\beta^*}{m_0} (P - P_0) \right] ,$$

откуда после дифференцирования по времени  $t$  находим:

$$\frac{\partial(\rho m)}{\partial t} = \rho_0\beta^* \frac{\partial P}{\partial t} . \quad (6.11)$$

Подставляя (6.11) в общее дифференциальное уравнение (6.8), имеем:

$$\frac{K}{\mu} \rho_0 \nabla^2 P = \rho_0\beta^* \frac{\partial P}{\partial t} ,$$

или

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \chi \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) , \quad (6.12)$$

где

$$\chi = \frac{K}{\mu\beta^*}$$

Уравнение (6.12) является **основным дифференциальным уравнением упругого режима фильтрации**.

$\chi$  - **коэффициент пьезопроводности**, характеризующий скорость перераспределения пластового давления при неустановившейся фильтрации упругой жидкости в упругой пористой среде,  $\chi = 0,1 \div 5 \text{ м}^2/\text{с}$ .

#### 6.4. Прямолинейно-параллельный фильтрационный поток упругой жидкости

Постановка задачи:

- 1) режим пласта – упругий;
- 2) движение жидкости – неустановившееся;
- 3) пласт однородный и деформируемый;
- 4) жидкость сжимаемая;
- 5) соблюдается закон Дарси.

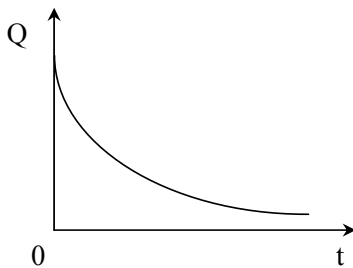
Рассмотрим два случая.

**Случай I.** На галерее поддерживается постоянное давление  $P_z$ .

Закон распределения давления в неустановившемся прямолинейно-параллельном фильтрационном потоке упругой жидкости имеет вид:

$$P = P_z + (P_k - P_z) \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\chi t}}\right), \quad (6.13)$$

где  $\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\chi t}}\right)$  - интеграл вероятности, являющийся табулированной функцией, изменяется в пределах от 0 до 1.



Дебит галереи в любой момент времени составляет:

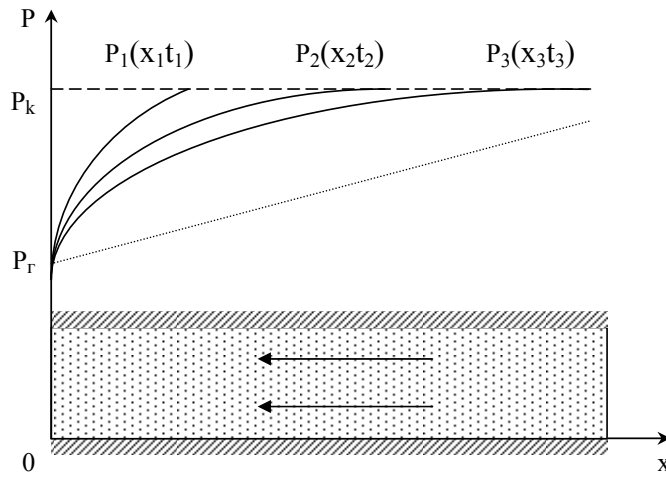
$$Q = \frac{K}{\mu} \frac{P_k - P_z}{\sqrt{\pi \chi t}} B h. \quad (6.14)$$

Из формулы (6.14) следует, что дебит галереи убывает с течением времени как  $1/\sqrt{t}$  и при  $t \rightarrow \infty$  стремится к нулю.

Накопленная к моменту  $t$  добыча жидкости  $V_{доб}$  определится по формуле:

$$V_{доб} = \frac{2K}{\mu} \frac{P_k - P_z}{\sqrt{\pi \chi}} B h \sqrt{t}. \quad (6.15)$$

Кривые распределения давления в различные моменты времени имеют вид:



**Случай II.** Галерея пущена в эксплуатацию с постоянным дебитом  $Q$ .

Давление в любой точке пласта определится по формуле:

$$P(x, t) = P_z(t) + \frac{\mu V_1}{K} \left[ x \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{\chi t}} \right) \right) + \frac{2\sqrt{\chi t}}{\sqrt{\pi}} \left( 1 - e^{-\frac{x^2}{4\chi t}} \right) \right], \quad (6.16)$$

где  $V_1 = V(0, t)$  - скорость фильтрации на галерее в момент времени  $t$ .

Для того чтобы найти закон изменения давления на галерее  $P_z(t)$ , подставим в уравнения (6.16) граничное условие  $P(x, t) = P_k$  при  $x \rightarrow \infty$ .

Также при  $x \rightarrow \infty$

$$\operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{\chi t}} \right) \rightarrow 1, \quad e^{-\frac{x^2}{4\chi t}} \rightarrow 0.$$

После преобразований имеем:

$$P_z(t) = P_k - \frac{Q\mu}{Bh} \frac{2\sqrt{\chi t}}{K\sqrt{\pi}}. \quad (6.17)$$

## 6.5. Плоскорадиальный фильтрационный поток упругой жидкости.

### Основная формула теории упругого режима

Имея дело с горизонтальным упругим пластом большой протяженности и единственной скважиной, движение жидкости можно моделировать как плоскорадиальное, а скважину считать точечным стоком (источником) с  $R_c=0$ .

Давление в любой точке упругого пласта будет функцией двух переменных – расстояния  $r$  от этой точки до стока (источника) и времени  $t$ :

$$P = P(r, t).$$

Пусть скважина вскрывает неограниченный упругий пласт в некоторый начальный момент времени  $t=0$  и действует непрерывно с постоянным дебитом  $Q$ . Распределение давления в пласте определяется интегрированием уравнения (6.12), которое для плоскорадиального движения запишется в виде:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \chi \left( \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} \right).$$

Зададим начальные и граничные условия:

начальное условие -  $P(r, t) = P_k$  при  $t=0$ ;

условие на внутренней границе -  $Q = \frac{2\pi Kh}{\mu} \left( \frac{\partial P}{\partial r} \right)_{r=0}$  ;

условие на внешней границе -  $P(r, t) = P_k$  при  $r=\infty$ .

Точное решение этой задачи при  $R_c=0$  дается формулой:

$$\boxed{P_k - P(r, t) = \frac{Q\mu}{4\pi Kh} \left[ -E_i \left( -\frac{r^2}{4\chi t} \right) \right]} \quad \text{- основная формула теории упругого режима фильтрации} \quad (6.18)$$

$$-E_i \left( -\frac{r^2}{4\chi t} \right) = \int_{\frac{r^2}{4\chi t}}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \quad \text{- интегральная показательная функция, значения которой имеются в таблицах.}$$

При малых значениях аргумента  $\left(\frac{r^2}{4\chi t}\right) \ll 1$  функцию  $-E_i\left(-\frac{r^2}{4\chi t}\right)$

можно приближенно заменить формулой:

$$-E_i\left(-\frac{r^2}{4\chi t}\right) \approx \ln \frac{4\chi t}{r^2} - 0,5772, \text{ тогда}$$

$$P_k - P(r, t) \approx \frac{Q\mu}{4\pi Kh} \left( \ln \frac{4\chi t}{r^2} - 0,5772 \right).$$

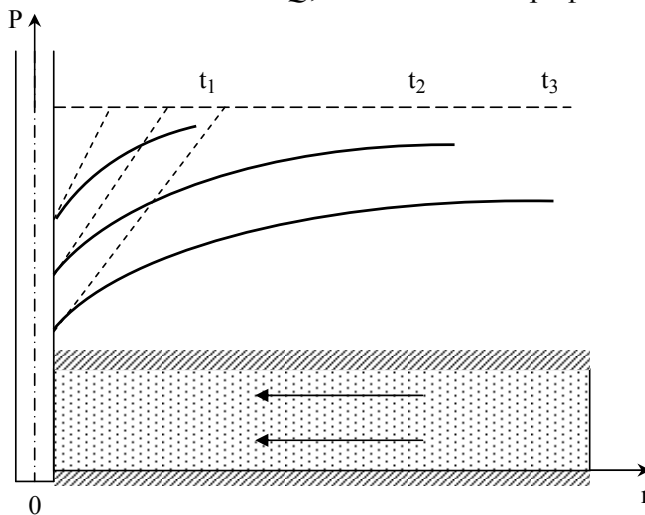
Расход жидкости  $Q'$  через любую цилиндрическую поверхность радиуса  $r$  (т.е. в любом сечении пласта) и скорость фильтрации соответственно определяются по формулам:

$$Q'(r, t) = \frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} 2\pi r h = Q e^{-\frac{r^2}{4\chi t}},$$

$$V = \frac{Q}{2\pi r h} e^{-\frac{r^2}{4\chi t}}.$$

Из последней формулы следует, что стационарная скорость  $V = \frac{Q}{2\pi r h}$  достигается очень быстро на небольших расстояниях от скважины.

Пьезометрические кривые для бесконечного пласта, эксплуатируемого скважиной с постоянным дебитом  $Q$ , имеют вид логарифмических линий:



Углы касательных на забое скважины одинаковы для всех кривых.

### 6.6. Интерференция скважин в условиях упругого режима

При совместной работе в пласте нескольких добывающих и нагнетательных скважин изменения давления, вызванные работой каждой скважины, алгебраически суммируются по принципу суперпозиции. Скорости фильтрации в любой точке пласта суммируются геометрически.

Для расчета изменения пластового давления используется основная формула упругого режима. Хотя эта формула выведена для точечного стока в бесконечном пласте, В.Н.Щелкачев показал, что ею можно с высокой степенью точности пользоваться и в расчетах притока упругой жидкости к скважине конечного радиуса в открытом или закрытом конечном пласте.

$$\begin{aligned}\Delta P_M = P_k - P(r, t) &= \sum_{j=1}^n \frac{Q_j \mu}{4\pi K h} \left[ -E_i \left( -\frac{r_j^2}{4\chi t} \right) \right] = \\ &= \frac{\mu}{4\pi K h} \sum_{j=1}^n Q_j \left[ -E_i \left( -\frac{r_j^2}{4\chi t} \right) \right],\end{aligned}\quad (6.19)$$

где  $\Delta P_M = P_k - P$  - изменение давления в произвольной точке пласта  $M$ ;  $n$  - число скважин;  $Q_j$  - дебит  $j$ -ой скважины, причем  $Q_j > 0$ , если скважина добывающая, и  $Q_j < 0$ , если скважина нагнетательная;  $r_j$  - расстояние от центра  $j$ -ой скважины до точки  $M$ .

Если скважины начали работать в разное время, то формула (6.19) будет иметь вид:

$$\Delta P_M = P_k - P(r, t) = \frac{\mu}{4\pi K h} \sum_{j=1}^n Q_j \left[ -E_i \left( -\frac{r_j^2}{4\chi t_j} \right) \right],$$

где  $t_j$  - время, прошедшее с начала работы  $j$ -ой скважины.

## 6.7. Приближенные методы решения задач теории упругого режима

Формулы (6.13), (6.16) и (6.18) представляют собой точные решения основного дифференциального уравнения упругого режима фильтрации, полученные путем интегрирования при заданных начальных и граничных условиях.

Однако существуют и приближенные решения, полученные с помощью различных методов. Наиболее известны:

- 1) метод последовательной смены стационарных состояний (ПССС);
- 2) метод А.М.Пирвердяна;
- 3) метод интегральных соотношений;
- 4) метод «усреднения».

### 6.7.1. Метод последовательной смены стационарных состояний

Данный метод предложен И.А.Чарным и основан на предположении, что давление в пласте изменяется во времени значительно медленнее, чем по координате. Поэтому производную по времени можно в первом приближении отбросить, в результате чего для давления получается уравнения Лапласа, описывающее стационарный процесс.

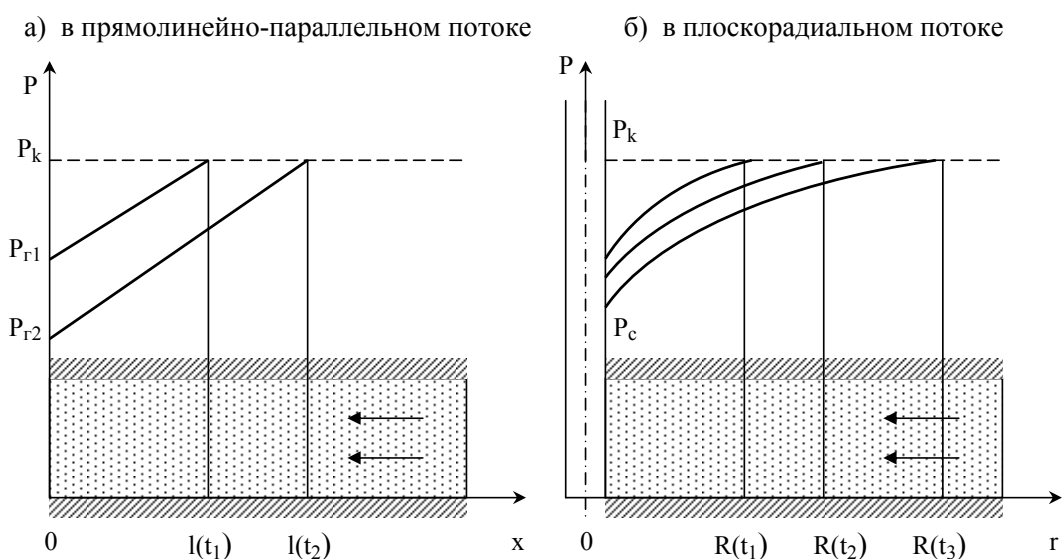
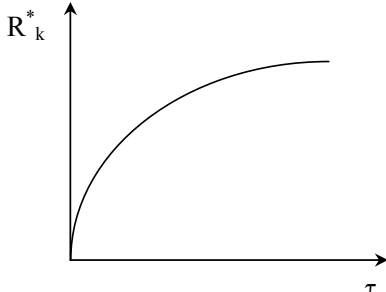


Рис. 6.1. Кривые распределения давления по методу ПССС



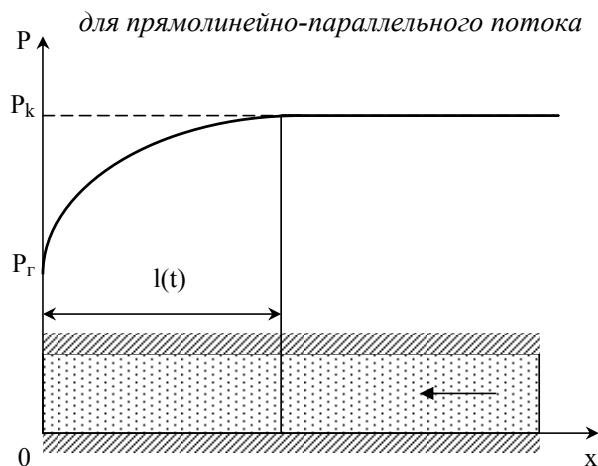
В каждый момент времени вся область движения жидкости условно разделяется на две области: возмущенную и невозмущенную. При этом предполагается, что в возмущенной области, начинающейся от стенки скважины, давление распределяется так, как будто бы движение жидкости в ней установившееся. Внешняя граница этой области служит в данный момент контуром питания. В невозмущенной области пласта давление всюду постоянно и равно начальному. Закон движения подвижной границы раздела двух областей определяется при помощи уравнения материального баланса и граничных условий.

Характеристика	Прямолинейно-параллельный поток	Плоскорадиальный поток
<b>Случай I.</b> Галерея (скважина) эксплуатируется с постоянным дебитом, $Q=const$		
Распределение давления в возмущенной области	$P(x,t) = P_{\kappa} - \frac{Q\mu}{KBh} [l(t) - x],$ $0 \leq x \leq l(t)$	$P(r,t) = P_{\kappa} - \frac{Q\mu}{2\pi Kh} \ln \frac{R(t)}{r},$ $R_c \leq r \leq R(t)$
Дебит галереи (скважины)	$Q = \frac{K}{\mu} \frac{P_{\kappa} - P_c(t)}{l(t)} Bh = const$	$Q = \frac{2\pi Kh}{\mu} \frac{P_{\kappa} - P_c(t)}{\ln \frac{R(t)}{R_c}} = const$
Закон движения границы возмущенной области	$l(t) = \sqrt{2\chi t}$	$R(t) = \sqrt{R_c^2 + 4\chi t} \approx 2\sqrt{\chi t}$
Закон распределения давления в целом по пласту	$P(x,t) = P_{\kappa} - \frac{Q\mu}{KBh} [\sqrt{2\chi t} - x]$ <p style="text-align: center;">при <math>0 \leq x \leq \sqrt{2\chi t}</math>;</p> $P(x,t) = P_{\kappa} \text{ при } x > \sqrt{2\chi t}$	$P(r,t) = P_{\kappa} - \frac{Q\mu}{2\pi Kh} \ln \frac{\sqrt{R_c^2 + 4\chi t}}{r}$ <p style="text-align: center;">при <math>R_c \leq r \leq \sqrt{R_c^2 + 4\chi t}</math>;</p> $P(r,t) = P_{\kappa} \text{ при } r > \sqrt{R_c^2 + 4\chi t}$

Случай II. На галерее (скважине) поддерживается постоянное давление		
Дебит галереи (скважины)	$Q(t) = \frac{K}{\mu} \frac{P_k - P_c}{2\sqrt{\chi t}} Bh$	$Q = \frac{2\pi Kh}{\mu} \frac{P_k - P_c}{\ln \frac{R(t)}{R_c}}$
Закон движения границы возмущенной области	$l(t) = \sqrt{2\chi t}$	 <p>где <math>R_k^*</math> - безразмерный радиус воронки депрессии, <math>R(t)/R_c</math>; <math>\tau</math> - безразмерное время</p> $\tau = \frac{2K}{\mu\beta * R_c^2} t$
Распределение давления в пласте	$P(x, t) = P_k - (P_k - P_c) \times \left(1 - \frac{x}{2\sqrt{\chi t}}\right)$ <p>при <math>0 \leq x \leq \sqrt{2\chi t}</math>;</p> $P(x, t) = P_k \text{ при } x > \sqrt{2\chi t}$	

### 6.7.2. Метод А.М.Пирвердяна

Неустановившийся прямолинейно-параллельный фильтрационный поток, так же как и в предыдущем случае, разбивается на две области – возмущенную и невозмущенную. Однако в отличие от метода ПССС распределение давления в возмущенной области задается в виде квадратичной параболы, касательная к которой в точке  $x = l(t)$  горизонтальна. Это обеспечивает плавное смыкание профиля давлений в возмущенной и невозмущенной областях.



Рассмотрим два случая применительно к прямолинейно-параллельному потоку.

Характеристика потока	Случай I. $Q=const$	Случай II. $P_c=const$
Закон движения границы возмущенной области	$l(t) = \sqrt{6\chi t}$	$l(t) = \sqrt{12\chi t}$
Дебит галереи	$Q = 2 \frac{K}{\mu} \frac{P_k - P_c(t)}{\sqrt{6\chi t}} Bh$	$Q = \frac{2K}{\mu} \frac{P_k - P_c}{\sqrt{12\chi t}} Bh$
Закон распределения давления в пласте	$P(x, t) = P_k - \frac{Q\mu}{2KBh} \sqrt{6\chi t} \times$ $\times \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{6\chi t}} \right)^2$ <p style="text-align: center;">при <math>0 \leq x \leq \sqrt{6\chi t}</math> ;</p> $P(x, t) = P_k \text{ при } x > \sqrt{6\chi t}$	$P(x, t) = P_k - (P_k - P_c) \times$ $\times \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{12\chi t}} \right)$ <p style="text-align: center;">при <math>0 \leq x \leq \sqrt{12\chi t}</math> ;</p> $P(x, t) = P_k \text{ при } x > \sqrt{12\chi t}$

### 6.7.3. Метод интегральных соотношений

Метод предложен Г.И.Баренблаттом и основан на следующих предпосылках:

а) в каждый момент времени пласт делится на конечную возмущенную область и невозмущенную область, в которой движение отсутствует;

б) в возмущенной области распределение давления представляется в виде многочлена с коэффициентами, зависящими от времени;

Для прямолинейно-параллельного потока:

$$P(x, t) = a_0(t) + a_1(t) \frac{x}{l(t)} + \dots + a_n(t) \frac{x^n}{l^n(t)}, \quad 0 \leq x \leq l(t); \quad (6.20)$$

Для плоскорадиального потока:

$$P(r, t) = a_0(t) \ln \frac{r}{R(t)} + a_1(t) + a_2(t) \frac{r}{R(t)} + \dots + a_{n+1}(t) \frac{r^n}{R^n(t)},$$

$$R_c \leq r \leq R(t). \quad (6.21)$$

Число членов  $n$  выбирается в зависимости от желаемой точности решения;

в) коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , а также размер области возмущения  $l(t)$  или  $R(t)$  находятся из условий на галерее (забое скважины), из условий непрерывности и гладкости кривой давления на границе области возмущения, а также из особых интегральных соотношений.

Если принять в формуле (6.20)  $n=1$ , а в формуле (6.21)  $n=0$ , то получатся решения, соответствующие методу ПССС. Если  $n=2$ , то из метода интегральных соотношений вытекает как частный случай метод А.М.Пирвердяна.

Рассмотрим задачу плоскорадиальной неустановившейся фильтрации упругой жидкости к скважине радиусом  $R_c$ , пущенной в эксплуатацию в момент времени  $t=0$  с постоянным дебитом  $Q$ . В начальный момент времени давление в пласте постоянно и равно  $P_k$ .

Распределение давления в возмущенной области пласта  $R_c \leq r \leq R(t)$  зададим в виде:

$$P(r, t) = a_0 \ln \frac{r}{R(t)} + a_1 + a_2 \frac{r}{R(t)}.$$

Коэффициенты  $a_0, a_1$  и  $a_2$  определяются из условий на забой скважины и на границе возмущенной области.

Условие на забое:

$$Q = \frac{2\pi Kh}{\mu} \left( \frac{\partial P}{\partial r} \right)_{r=0} = const \quad \text{при } r=0, t>0.$$

На границе возмущенной области имеем:

$$P = P_k \quad \text{при } r = R(t),$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = R(t) - \text{условие гладкости кривой давления.}$$

Тогда:

$$a_0 = \frac{Q\mu}{2\pi Kh}; \quad a_1 = P_k + \frac{Q\mu}{2\pi Kh}; \quad a_2 = \frac{Q\mu}{2\pi Kh}.$$

При этом слагаемые, пропорциональные  $R_c$  или  $R_c^2$ , отброшены вследствие их малости.

После подстановки в формулу распределения давления будем иметь:

$$P(r, t) = P_k + \frac{Q\mu}{2\pi Kh} \left[ \ln \frac{r}{R(t)} + 1 - \frac{r}{R(t)} \right].$$

Закон движения границы возмущенной области:

$$R(t) = \sqrt{R_c^2 + 12\chi t}.$$

#### 6.7.4. Метод усреднения Ю.Д Соколова-Г.П.Гусейнова

Метод заключается в том, что в дифференциальном уравнении упругого режима

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \chi \left( \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} \right)$$

производная давления  $\frac{\partial P}{\partial t}$  заменяется некоторой функцией времени  $F(t)$ :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = F(t) = \frac{2}{R^2(t) - R_c^2} \int_{R_c}^{R(t)} \frac{\partial P}{\partial t} r dr.$$

Значение функции определяется из начальных и граничных условий.

После замены получаем:

$$F(t) = \chi \left( \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} \right).$$

Интегрируя данное уравнение по  $r$  и учитывая начальные и граничные условия, можно получить закон распределения давления в плоскорадиальном потоке при постоянном дебите скважины  $Q$ :

$$P = P_k + \frac{Q\mu}{2\pi Kh} \ln \frac{r}{R(t)} + \frac{Q\mu}{4\pi Kh} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2(t)} \right); \quad R(t) = \sqrt{R_c^2 + 8\chi t}.$$

Э.Б.Чекалюк предложил определять дебит скважин, работающей с постоянным забойным давлением, по формуле Дюпюи, введя в нее радиус возмущенной области:

$$Q = \frac{2\pi Kh}{\mu} \frac{P_k - P_c}{\ln \frac{R(t)}{R_c}}, \quad \text{где } R(t) = R_c + \sqrt{\pi\chi t}.$$

Эта формула очень важна для практики. Относительная погрешность при определении дебита не превышает 1%.

## 6.8. Определение коллекторских свойств пласта по данным исследования скважин на неустановившемся режиме

Гидродинамические методы исследования пластов и скважин, связанные с замерами пластовых и забойных давлений, называются пьезометрическими. Различают две группы пьезометрических методов – при установившихся и неустановившихся режимах.

Методы исследования скважин на неустановившемся режиме тесно связаны с теорией упругого режима, так как после пуска или остановки скважины на ее забое и в пласте возникают длительные процессы перераспределения давления.

Чаще всего при гидродинамическом исследовании измеряют восстановление забойного давления после остановки скважины, ранее продолжительное время работавшей с постоянным дебитом. Давление

измеряют с помощью скважинных глубинных манометров и строят график изменения давления с течением времени – кривую восстановления давления (КВД).

С помощью основной формулы теории упругого режима можно получить следующую функциональную зависимость между изменением забойного давления  $\Delta P_c$  и временем  $t$ :

$$\Delta P_c = \frac{Q\mu}{4\pi Kh} \left[ -E_i \left( -\frac{\bar{r}_c^2}{4\chi t} \right) \right] \approx \frac{Q\mu}{4\pi Kh} \left( \ln \frac{4\chi t}{\bar{r}_c^2} - 0,5772 \right) = \frac{Q\mu}{4\pi Kh} \left( \ln \frac{4\chi t}{\bar{r}_c^2} - \ln 1,781 \right) =$$

где

$$= \frac{Q\mu}{4\pi Kh} \cdot 2,3 \cdot \lg \frac{2,25\chi t}{\bar{r}_c^2}, \quad (6.22)$$

$\bar{r}_c$  - приведенный радиус скважины.

Перепишем формулу (6.22) в виде:

$$\Delta P_c = \frac{2,3Q\mu}{4\pi Kh} \lg t + \frac{2,3Q\mu}{4\pi Kh} \lg \frac{2,25\chi}{\bar{r}_c^2}$$

или

$$\Delta P_c = A \lg t + B.$$

Это – уравнение прямой линии. Здесь  $A$  – угловой коэффициент прямой в координатах  $\Delta P(\lg t)$ :

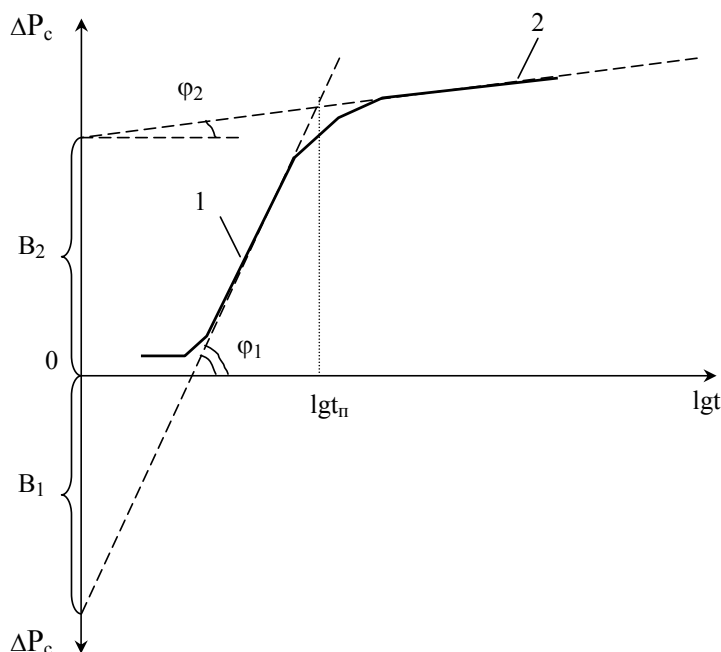
$$A = \operatorname{tg} \varphi = \frac{2,3Q\mu}{4\pi Kh}, \quad (6.23)$$

$B$  – отрезок, отсекаемый на оси  $\Delta P$  асимптотой при  $\lg t = 0$ :

$$B = \frac{2,3Q\mu}{4\pi Kh} \lg \frac{2,25\chi}{\bar{r}_c^2}. \quad (6.24)$$

Обработка КВД и определение по ним коллекторских свойств пласта проводятся следующим образом. Снятую манометром КВД после остановки скважины перестраивают в полулогарифмических координатах -  $\Delta P(\lg t)$ . На фактических КВД обычно четко выделяются два прямолинейных участка, первый из которых (1) характеризует призабойную зону, а второй (2) – удаленную зону пласта.

Изменение проницаемости в призабойной зоне пласта, обуславливающее форму начального участка КВД, в зарубежной литературе именуется «скин-эффектом».



Каждый участок КВД обрабатывается отдельно и дифференцированно определяются параметры призабойной и удаленной зон пласта. Находятся отрезки, отсекаемые продолжениями прямолинейных участков на оси  $\Delta P_c$  ( $B_1$  и  $B_2$ ), и тангенсы углов наклона прямых к оси абсцисс ( $A_1$  и  $A_2$ ). При этом важно помнить, что

$$A = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta P_2 - \Delta P_1}{\lg t_2 - \lg t_1}.$$

Затем с помощью равенства (6.23) определяется параметр  $\varepsilon = \frac{Kh}{\mu}$ , называемый гидропроводностью пласта:

$$\text{для призабойной зоны} \quad \varepsilon_1 = \frac{K_1 h}{\mu} = \frac{2,3Q}{4\pi A_1};$$

$$\text{для удаленной зоны} \quad \varepsilon_2 = \frac{K_2 h}{\mu} = \frac{2,3Q}{4\pi A_2}.$$

Затем находят проницаемость и пьезопроводность:



$$\begin{aligned} \text{для призабойной зоны} \quad K_1 &= \frac{\varepsilon_1 \mu}{h}; & \chi_1 &= \frac{K_1}{\mu(m\beta_{жс} + \beta_c)}; \\ \text{для удаленной зоны} \quad K_2 &= \frac{\varepsilon_2 \mu}{h}; & \chi_2 &= \frac{K_2}{\mu(m\beta_{жс} + \beta_c)}. \end{aligned}$$

При необходимости из уравнения (6.24) можно определить приведенный радиус скважины:

$$\bar{r}_c = \sqrt{\frac{2,25\chi_1}{\frac{B_1}{10^{A_1}}}}.$$

### **Контрольные вопросы:**

30. Охарактеризуйте упругий режим работы залежи.
31. Что понимается под упругим запасом жидкости в пласте?
32. Что собой представляют и как связаны между собой коэффициенты объемной упругости и упругоемкости?
33. Как получить основное дифференциальное уравнение упругого режима фильтрации? Что характеризует коэффициент пьезопроводности?
34. Сравните и проанализируйте основные характеристики прямолинейно-параллельного неустановившегося движения упругой жидкости к добывающей галерее, работающей: а) с постоянным дебитом; б) при постоянном давлении.
35. Приведите основную формулу теории упругого режима для одиночной скважины и для скважин, работающих совместно.
36. Перечислите и охарактеризуйте приближенные методы решения задач теории упругого режима.
37. Каким образом и в какой последовательности обрабатывается КВД для получения информации о коллекторских свойствах пласта?
38. Что такое «скин-эффект»?

## **7. ОДНОМЕРНЫЕ УСТАНОВИВШИЕСЯ ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ПОТОКИ ГАЗА**

### **7.1. Дифференциальные уравнения фильтрации газа по линейному закону**

Уравнение неразрывности потока сжимаемой жидкости в деформируемой пористой среде имеет вид:

$$\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} = - \frac{\partial(\rho m)}{\partial t}. \quad (7.1)$$

Уравнения движения в горизонтальном фильтрационном потоке записываются в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_x = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}, \\ V_y = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y}, \\ V_z = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z}. \end{array} \right. \quad (7.2)$$

Введем функцию  $\mathcal{P}$  следующим образом. Примем, что ее дифференциал равен:

$$d\mathcal{P} = \frac{K(P)\rho(P)}{\mu(P)} dP, \text{ тогда}$$

$$\boxed{\mathcal{P} = \int \frac{K(P)\rho(P)}{\mu(P)} dP + C} \quad - \text{ функция Л.С.Лейбензона.} \quad (7.3)$$

От дифференциала функции Л.С.Лейбензона, перейдем к частным производным:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} = \frac{K(P)\rho(P)}{\mu(P)} \frac{\partial P}{\partial x}; \\ \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} = \frac{K(P)\rho(P)}{\mu(P)} \frac{\partial P}{\partial y}; \\ \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} = \frac{K(P)\rho(P)}{\mu(P)} \frac{\partial P}{\partial z}. \end{array} \right. \quad (7.4)$$

Запишем уравнения движения для массовых скоростей фильтрации с учетом соотношений (7.4):

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho V_x = -\rho \frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} ; \\ \rho V_y = -\rho \frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} ; \\ \rho V_z = -\rho \frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} . \end{array} \right.$$

Тогда уравнение неразрывности (7.1) можно записать в виде:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial z^2} = \frac{\partial(\rho m)}{\partial t} \quad (7.6)$$

или

$$\nabla^2 \mathcal{P} = \frac{\partial(\rho m)}{\partial t} . \quad (7.6')$$

В случае установившейся фильтрации правая часть уравнений (7.6) обращается в 0, в результате чего можно записать:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial z^2} = 0 \quad (7.7)$$

или  $\nabla^2 \mathcal{P} = 0$  .

Следовательно, функция Л.С.Лейбензона удовлетворяет уравнению Лапласа.

## 7.2. Аналогия между фильтрацией жидкости и идеального газа

Введение функции Л.С.Лейбензона в дифференциальные уравнения теории фильтрации позволяет установить аналогию между установившейся фильтрацией сжимаемого флюида (газа) и установившейся фильтрацией несжимаемой жидкости.

В наиболее простом случае можно считать  $K=const$ . При малых пластовых давлениях и небольших депрессиях можно также пренебречь зависимостью вязкости  $\mu$  от давления. Такое допущение справедливо для идеальных сред, в которых отсутствует внутреннее трение, обусловленное процессами внутреннего молекулярного обмена.

Тогда функцию Л.С.Лейбензона можно представить в виде:

$$\mathcal{P} = \int \rho(P) dP + C,$$

при этом  $d\mathcal{P} = \rho(P) dP$ .

Сравним две записи закона Дарси в дифференциальной форме – для установившейся фильтрации несжимаемой жидкости и для установившейся фильтрации газа.

Жидкость	Газ
$Q = -\frac{K}{\mu} \frac{dP}{dS} f(S),$ <p>где <math>Q=const</math> – объемный расход жидкости;  <math>f(S)</math> – площадь поперечного сечения струи</p>	$Q_m = \rho Q = -\frac{K}{\mu} \rho(P) \frac{dP}{dS} f(S) =$ $= -\frac{K}{\mu} \frac{d\mathcal{P}}{dS} f(S),$ <p>где <math>Q_m = \rho Q = const</math> – массовый расход газа</p>

Данные уравнения однотипны, следовательно, все формулы, полученные для установившейся фильтрации жидкости, можно применять и для установившейся фильтрации газа, используя аналогию следующих показателей:

Несжимаемая жидкость	Газ
объемный расход $Q$	- массовый расход $Q_m$
давление $P$	- функция Л.С.Лейбензона $\mathcal{P}$
объемная скорость фильтрации $V$	- массовая скорость фильтрации $\rho V$

### 7.3. Сравнительный анализ прямолинейно-параллельного и плоскорадиального фильтрационных потоков идеального газа

Исследованиями Б.Б.Лапука было установлено, что фильтрацию газа в реальных пластах можно рассматривать как изотермический процесс, для которого справедлив закон Бойля-Мариотта. При  $T=const$

$$PV = P_{am} V_{am}$$

или

$$P \frac{m}{\rho} = P_{am} \frac{m}{\rho_{am}},$$

где  $m$  – масса газа.

Отсюда

$$\boxed{\rho = \frac{\rho_{am}}{P_{am}} P} \quad - \text{уравнение состояния идеального газа.}$$

С учетом уравнения состояния идеального газа выражение функции Л.С.Лейбензона приобретает вид:

$$\mathcal{P} = \int \rho(P) dP + C = \int \frac{\rho_{am}}{P_{am}} P dP + C = \frac{\rho_{am}}{2P_{am}} P^2 + C.$$

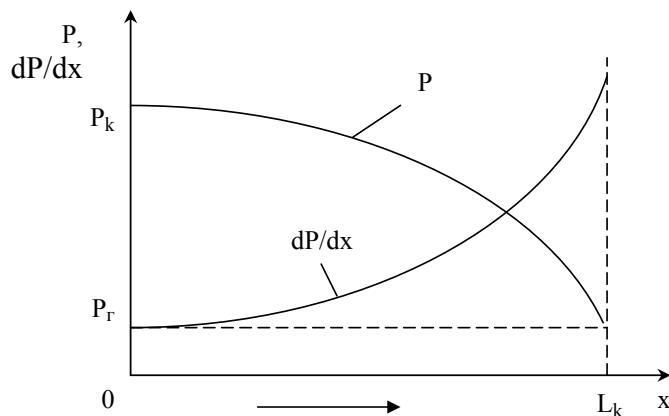
Характеристика	Прямолинейно-параллельный поток	Плоскорадиальный поток
Распределение давления	$1. \mathcal{P} = \mathcal{P}_k - \frac{\mathcal{P}_k - \mathcal{P}_c}{L_k} x$ $2. P = \sqrt{P_k^2 - \frac{P_k^2 - P_c^2}{L_k} x}$	$1. \mathcal{P} = \mathcal{P}_k - \frac{\mathcal{P}_k - \mathcal{P}_c}{\ln \frac{R_k}{R_c}} \ln \frac{R_k}{r}$ $2. P = \sqrt{P_k^2 - \frac{P_k^2 - P_c^2}{\ln \frac{R_k}{R_c}} \ln \frac{R_k}{r}}$
Градиент давления	$1. \frac{d\mathcal{P}}{dx} = - \frac{\mathcal{P}_k - \mathcal{P}_c}{L_k}$ $2. \frac{dP}{dx} = - \frac{P_k^2 - P_c^2}{2L_k} \cdot \frac{1}{P}$	$1. \frac{d\mathcal{P}}{dr} = - \frac{\mathcal{P}_k - \mathcal{P}_c}{\ln \frac{R_k}{R_c}} \cdot \frac{1}{r}$ $2. \frac{dP}{dr} = - \frac{P_k^2 - P_c^2}{2 \ln \frac{R_k}{R_c}} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{P}$
Скорость фильтрации	$1. \rho V = \frac{K}{\mu} \frac{\mathcal{P}_k - \mathcal{P}_c}{L_k}$ $2. V = \frac{K}{2\mu} \cdot \frac{P_k^2 - P_c^2}{L_k} \cdot \frac{1}{P}$	$1. \rho V = \frac{K}{\mu} \frac{\mathcal{P}_k - \mathcal{P}_c}{\ln \frac{R_k}{R_c}} \cdot \frac{1}{r}$ $2. V = \frac{K}{\mu} \cdot \frac{P_k^2 - P_c^2}{2 \ln \frac{R_k}{R_c}} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{P}$

Дебит газа, приведенный к атмосферному давлению	$Q_{am} = \frac{Q_m}{\rho_{am}} =$ $= \frac{K}{\mu P_{am}} \frac{P_k^2 - P_c^2}{2L_k} Bh$	$Q_{am} = \frac{Q_m}{\rho_{am}} =$ $= \frac{\pi Kh}{\mu P_{am}} \frac{P_k^2 - P_c^2}{\ln \frac{R_k}{R_c}}$
Средневзвешенное пластовое давление	$\tilde{P} = \frac{2}{3} \cdot \frac{P_k^3 - P_c^3}{P_k^2 - P_c^2}$	$\tilde{P} = P_k \left[ 1 - \frac{1 - \left( \frac{P_c}{P_k} \right)^2}{4 \ln \frac{R_k}{R_c}} \right]$

Анализируя соотношения, можно отметить следующее.

В прямолинейно-параллельном потоке:

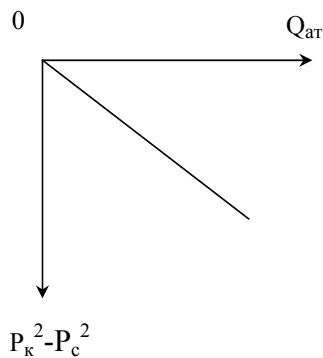
- а) давление по длине пласта изменяется по параболическому закону, зависимость  $P^2(x)$  - линейная;
- б) объемный расход газа, приведенный к атмосферному давлению, постоянный по длине пласта;
- в) скорость фильтрации и градиент давления возрастают при приближении к галерее. Физически возрастание скорости фильтрации вдоль газового потока происходит за счет расширения газа при снижении давления.



В плоскорадиальном потоке:

а) распределение давления подчинено логарифмическому и полулогарифмическому законам, поэтому в газовом потоке, в отличие от потока жидкости, имеет место резкое падение давления вблизи скважины и весьма малое – вдали от нее. Площадь и объем пласта с пониженным давлением вблизи скважины значительно меньше объема газового пласта в целом. Поэтому в газонасыщенном пласте давление повсюду считается одинаковым, приблизительно равным давлению на контуре питания;

б) градиент давления и скорость фильтрации вблизи забоя газовой скважины резко возрастают как за счет уменьшения  $r$ , так и за счет падения давления  $P$ .



Индикаторная диаграмма при фильтрации газа строится в координатах  $Q_{ат} - (P_k^2 - P_c^2)$  и в установившемся плоскорадиальном потоке имеет прямолинейный характер.

#### 7.4. Плоскорадиальный фильтрационный поток идеального газа по двучленному закону фильтрации

Для получения зависимостей, характеризующих фильтрацию газа в условиях нарушения закона Дарси, уравнением (7.7) пользоваться нельзя. В этом случае прибегают к интегрированию уравнения Форхгеймера

$$\frac{dP}{dr} = \frac{\mu}{K} V + \beta \frac{\rho}{\sqrt{K}} V^2.$$

В итоге распределение давления в плоскорадиальном потоке газа принимает вид:

$$P = \sqrt{P_c^2 + \frac{\mu P_{ам} Q_{ам}}{\pi K h} \ln \frac{r}{R_c} + \frac{\rho_{ам} P_{ам} \beta Q_{ам}^2}{2 \pi^2 h^2 \sqrt{K}} \left( \frac{1}{R_c} - \frac{1}{r} \right)}.$$

Дебит скважины определится с помощью уравнения притока газа к скважине:

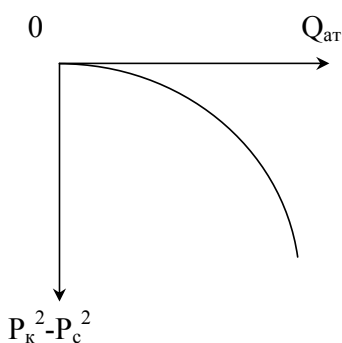
$$P_k^2 - P_c^2 = \frac{\mu P_{am} Q_{am}}{\pi K h} \ln \frac{R_k}{R_c} + \frac{\rho_{am} P_{am} \beta Q_{am}^2}{2\pi^2 h^2 R_c \sqrt{K}}$$

или

$$P_k^2 - P_c^2 = A Q_{am} + B Q_{am}^2 ,$$

где

$$A = \frac{\mu P_{am}}{\pi K h} \ln \frac{R_k}{R_c} , \quad B = \frac{\rho_{am} P_{am} \beta}{2\pi^2 h^2 R_c \sqrt{K}} .$$



Коэффициенты фильтрационных сопротивлений  $A$  и  $B$  определяются экспериментально по данным исследования скважины на установившихся режимах.

Уравнение притока газа к скважине широко используется в расчетах при проектировании разработки газовых месторождений и для определения коллекторских свойств газового пласта.

## 7.5. Плоскорадиальный фильтрационный поток реального газа

Особенностью реальных углеводородных газов по сравнению с идеальным газом является их отклонение от уравнения Менделеева-Клапейрона.

Идеальный газ удовлетворяет данному уравнению в виде:

$$\frac{P}{\rho} = RT , \quad (7.8)$$

где  $R$ - газовая постоянная для газа с молекулярной массой  $M$ , связанная с универсальной газовой постоянной  $\bar{R}$  зависимостью

$$R = \frac{\bar{R}}{M} .$$

Для реального газа уравнение (7.8) приобретает вид:



$$\frac{P}{\rho} = zRT .$$

Если пластовое давление выше 10 МПа и депрессия не слишком мала ( $P_c/P_k \leq 0,9$ ), то уравнение состояния природного газа также значительно отличается от уравнения состояния идеального газа. Плотность в этом случае определяется по формуле:

$$\rho = \frac{\rho_{am} z(P_{am})}{P_{am} z(P)} P \quad \text{- уравнение состояния реального газа.}$$

В данных уравнениях  $z$  – коэффициент сжимаемости, характеризующий степень отклонения состояния реального газа от закона идеального газа. Значения  $z$  определяются по графику Д.Брауна (рис. 7.1) в зависимости от приведенных величин абсолютного давления  $P_r$  и температуры  $T_r$ :

$$P_r = \frac{P}{P_{cr.кр.}} , \quad T_r = \frac{T}{T_{cr.кр.}} .$$

Здесь  $P_{cr.кр.}$  и  $T_{cr.кр.}$  – соответственно среднекритическое давление и среднекритическая температура, определяемые с учетом компонентного состава реального (природного) газа:

$$P_{cr.кр.} = \frac{\sum n_j P_{кр.j}}{\sum n_j} , \quad T_{cr.кр.} = \frac{\sum n_j T_{кр.j}}{\sum n_j} ,$$

где  $n_j$  – содержание  $j$ -ого компонента (метана, этана, пропана и т.д.) в газе, % об.;  $P_{кр.j}$ ,  $T_{кр.j}$  – критические давление и температура  $j$ -го компонента.

Кроме учета компонентного состава газа, при высоких давлениях необходимо принимать во внимание зависимость вязкости от давления.

#### **Случай I.** Приток реального газа к совершенной скважине по линейному закону фильтрации

Функция Л.С.Лейбензона запишется в виде:

$$\mathcal{P} = \int \frac{K\rho}{\mu} dP + C = \frac{K\rho_{am}}{P_{am}} \int \frac{PdP}{\mu(P)z(P)} + C .$$

Дебит скважины определится по формуле:

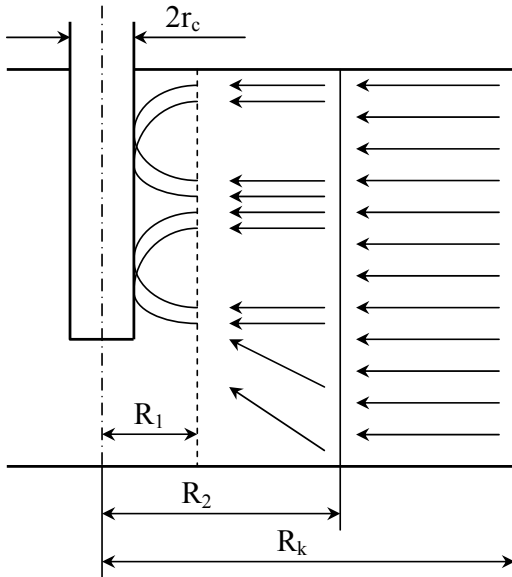
$$Q_{am} = \frac{Q_m}{\rho_{am}} = \frac{2\pi Kh}{P_{am} \ln \frac{R_k}{R_c}} \int_{P_c}^{P_k} \frac{P}{\mu(P)z(P)} dP \approx \frac{\pi Kh (P_k^2 - P_c^2)}{P_{am} \tilde{z} \tilde{\mu} \ln \frac{R_k}{R_c}} ,$$

где  $\tilde{z} = \frac{z_c + z_k}{2}$ ,  $\tilde{\mu} = \frac{\mu_c + \mu_k}{2}$  - среднепластовые значения коэффициентов сверхсжимаемости и вязкости, определяемые с помощью графиков зависимостей  $z(P)$  и  $\mu(P)$ .

**Случай II.** Приток реального газа к совершенной и несовершенной скважине по двучленному закону фильтрации

Уравнение притока реального газа по двучленному закону фильтрации к совершенной скважине имеет вид:

$$P_k^2 - P_c^2 = \frac{\tilde{\mu}\tilde{z}P_{am}}{\pi Kh} \ln \frac{R_k}{R_c} Q_{am} + \frac{\rho_{am}\tilde{z}P_{am}\beta}{2\pi^2 h^2 R_c \sqrt{K}} Q_{am}^2.$$



Круговой пласт, в центре которого находится несовершенная скважина, делится на три области.

В области с радиусом  $R_1 \approx (2-3)r_c$  вблизи перфорационных отверстий проявляется несовершенство по характеру вскрытия, и поток вблизи каждого отверстия близок к радиально-сферическому.

Во второй области ( $R_1 < r \leq R_2$ , причем  $R_2 \approx h$ ) линии тока искривляются из-за несовершенства скважины по степени вскрытия.

В первой и второй областях фильтрация газа происходит по двучленному закону.

В третьей области ( $R_2 < r \leq R_k$ ) действует закон Дарси, и движение можно считать плоскорадиальным.

Находя разности давлений на границах областей и суммируя полученные выражения, в итоге получим:

$$P_k^2 - P_c^2 = \frac{\tilde{\mu}\tilde{z}P_{am}}{\pi Kh} Q_{am} \left( \ln \frac{R_k}{R_c} + C_1 + C_2 \right) + \frac{\rho_{am}\tilde{z}P_{am}\beta}{2\pi^2 h^2 r_c \sqrt{K}} Q_{am}^2 (1 + r_c C_1' + r_c C_2'), \quad (7.9)$$

где  $C_1'$  и  $C_2'$  определяются по формулам:

$$C_1 = \frac{1}{\bar{h}} \ln \bar{h} + \frac{1-\bar{h}}{\bar{h}} \ln \frac{h}{R_1}, \quad \bar{h} = \frac{b}{h};$$

$$C_1' \approx \left( \frac{1}{h^2} - 1 \right) \frac{1}{h} \quad (\text{при } b \gg R_1);$$

$$C_2' \approx \frac{h^2}{(3N^2 R_0^3)},$$

где  $N$  – число отверстий;  $R_0$  – глубина перфорационного отверстия.

$C_2$  находится по графикам В.И.Щурова.

Уравнение (7.9) является уравнением притока реального газа к гидродинамически несовершенной скважине.

### **Контрольные вопросы:**

39. Приведите выражение и охарактеризуйте свойства функции Л.С.Лейбензона.

40. Как, пользуясь аналогией между фильтрацией несжимаемой жидкости и движением газа, получить уравнения распределения давления, дебита и скорости фильтрации газового потока?

41. В чем заключаются отличия реальных углеводородных газов от идеального газа? Что характеризует коэффициент сверхсжимаемости?

42. Сравните и проанализируйте основные характеристики прямолинейно-параллельного и плоскорадиального фильтрационных потоков газа.

43. Сопоставьте уравнения притока идеального и реального газа к совершенной скважине по линейному закону фильтрации.

44. Сопоставьте уравнения притока идеального и реального газа к совершенной скважине по двучленному закону фильтрации.

45. Сопоставьте уравнения притока реального газа к совершенной и несовершенной скважине по двучленному закону фильтрации.

## **8. НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ГАЗА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ**

### **8.1. Дифференциальное уравнение Лейбензона**

Для вывода дифференциального уравнения неуставившейся фильтрации идеального газа в уравнение неразрывности подставляют выражения для компонент скорости фильтрации и плотности идеального газа.

Считая  $m = \text{const}$ ,  $K = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$  и  $\rho = \frac{\rho_{am}}{P_{am}} P$ , получим:

$$\frac{K}{\mu} \frac{\rho_{am}}{P_{am}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( P \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( P \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( P \frac{\partial P}{\partial z} \right) \right] = \frac{\rho_{am} m}{P_{am}} \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (8.1)$$

Введем замену:

$$P \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial P^2}{\partial x}; \quad P \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial P^2}{\partial y}; \quad P \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial P^2}{\partial z}.$$

Тогда уравнение (8.1) примет вид:

$$\frac{K}{2\mu m} \left( \frac{\partial^2 P^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P^2}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (8.2)$$

Выражение в скобках представляет собой оператор Лапласа относительно  $P^2$ , поэтому уравнение (8.2) можно записать в виде:

$$\frac{K}{2\mu m} \nabla^2 P^2 = \frac{\partial P}{\partial t} \quad (8.2')$$

Полученное уравнение неуставившейся фильтрации газа (8.2) называется уравнением Лейбензона и представляет собой нелинейное уравнение параболического типа. Оно справедливо для идеального газа при выполнении закона Дарси.

Уравнение (8.2) можно записать иначе, умножив левую и правую части на давление  $P$  и введя замену  $P \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial P^2}{2\partial t}$ :

$$\frac{\partial P^2}{\partial t} = \frac{KP}{\mu m} \left( \frac{\partial^2 P^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P^2}{\partial z^2} \right). \quad (8.3)$$

В такой записи под знаками производных по координатам и по времени находится одна и та же функция  $P^2$ , но коэффициент в правой части  $\frac{KP}{\mu m}$  - переменный, в него входит искомая функция  $P(x,y,z,t)$ .

Уравнения (8.2) и (8.3) не имеют точных аналитических решений даже в самых простых одномерных случаях. Точное решение уравнения Лейбензона дают численные методы.

## 8.2. Линеаризация уравнения Лейбензона и его основное решение

Уравнение (8.2) можно упростить, заменив его линейным, для которого существуют точные аналитические решения.

Если рассматривается плоскорадиальный приток газа к скважине, то, как уже отмечалось, воронка депрессии очень крутая и на большей части пласта давление мало отличается от контурного. На этом основании Л.С.Лейбензон предложил заменить переменное давление  $P$  в коэффициенте уравнения (8.3) на постоянное давление  $P_{\kappa}$  (начальное давление в пласте). После ввода обозначения

$$\bar{\chi} = \frac{KP_{\kappa}}{\mu m},$$

получим:

$$\frac{\partial P^2}{\partial t} = \bar{\chi} \left( \frac{\partial^2 P^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P^2}{\partial z^2} \right). \quad (8.4)$$

Это уравнение является линейным уравнением пьезопроводности относительно функции  $P^2$ .

И.А.Чарный предложил свести уравнение (8.3) к линейному, заменив переменное давление  $P$  в коэффициенте  $\bar{\chi}$  на  $P_{cp}$ :

$$P_{cp} = P_{\min} + 0,7(P_{\max} - P_{\min}),$$

где  $P_{\max}$  и  $P_{\min}$  – максимальное и минимальное давление в газовой залежи за расчетный период.

Для плоскорадиальной фильтрации линеаризованное уравнение Лейбензона (8.4) запишется в виде:

$$\frac{\partial P^2}{\partial t} = \bar{\chi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P^2}{\partial r} \right). \quad (8.5)$$

Чтобы вывести формулу распределения давления, уравнение (8.5) необходимо проинтегрировать при условиях:

начальное -  $P^2 = P_{\kappa}^2$  при  $t=0, 0 < r < \infty$ ;

граничные -  $P^2 = P_{\kappa}^2$  при  $r=\infty, t>0$ ;

$$r \frac{\partial P^2}{\partial r} = \frac{Q_{am} P_{am} \mu}{\pi K h} \text{ - на стенке газовой скважины.}$$

Математическая постановка задачи о неустановившемся притоке газа к скважине аналогична постановке задачи об отборе упругой жидкости. Проведем сопоставление:

<i>Упругая жидкость</i>		<i>Идеальный газ</i>
$\frac{\partial P}{\partial t} = \chi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right)$	-	$\frac{\partial P^2}{\partial t} = \bar{\chi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P^2}{\partial r} \right)$
$P = P_{\kappa} \text{ при } t=0$	-	$P^2 = P_{\kappa}^2 \text{ при } t=0$
$P = P_{\kappa} \text{ при } r=\infty, t>0$	-	$P^2 = P_{\kappa}^2 \text{ при } r=\infty, t>0$
$r \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{Q\mu}{2\pi K h} \text{ при } r=0$	-	$r \frac{\partial P^2}{\partial r} = \frac{Q_{am} P_{am} \mu}{\pi K h} \text{ при } r=0$

Следовательно, для упругой жидкости и идеального газа характерна аналогия следующих показателей:

<i>Упругая жидкость</i>		<i>Идеальный газ</i>
давление $P$	-	квадрат давления $P^2$
коэффициент пьезопроводности	-	коэффициент пьезопроводности
$\chi = \frac{K}{\mu \beta^*}$		$\bar{\chi} = \frac{K P_{\kappa}}{\mu t}$
$\frac{Q\mu}{2\pi K h}$	-	$\frac{Q_{am} P_{am} \mu}{\pi K h}$

Используя данную аналогию, можно получить формулу распределения давления в неустановившемся потоке газа, преобразуя основную формулу упругого режима фильтрации жидкости.

Итак, основная формула упругого режима:

$$P_k - P(r, t) = \frac{Q\mu}{4\pi Kh} \left[ -E_i \left[ -\frac{r^2}{4\chi t} \right] \right].$$

Основная формула неустановившейся фильтрации идеального газа:

$$P_k^2 - P^2(r, t) = \frac{Q_{am} P_{am} \mu}{2\pi Kh} \left[ -E_i \left[ -\frac{r^2}{4\bar{\chi} t} \right] \right] \quad (8.6)$$

или

$$P(r, t) = \sqrt{P_k^2 - \frac{Q_{am} P_{am} \mu}{2\pi Kh} \left[ -E_i \left( -\frac{r^2}{4\bar{\chi} t} \right) \right]}. \quad (8.6')$$

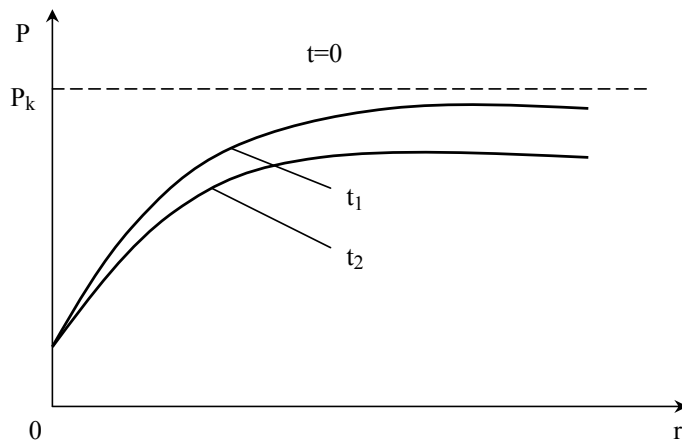
Для малых значений аргумента  $\frac{r^2}{4\bar{\chi} t}$  :

$$P_k^2 - P^2(r, t) = \frac{Q_{am} P_{am} \mu}{2\pi Kh} \ln \frac{2,25 \bar{\chi} t}{r^2}$$

или

$$P(r, t) = \sqrt{P_k^2 - \frac{Q_{am} P_{am} \mu}{2\pi Kh} \ln \frac{2,25 \bar{\chi} t}{r^2}}.$$

Графически распределение давления по пласту при неустановившемся притоке газа к скважине можно представить в виде:



Погрешность решения, которое дает линеаризация уравнения Лейбензона, по сравнению с численными методами составляет доли процента, поэтому оно может считаться точным.

### 8.3. Решение задачи о притоке газа к скважине методом последовательной смены стационарных состояний

Вновь используем предположения:

- 1) в каждый момент времени существует конечная возмущенная область, в которой происходит движение газа к скважине;
- 2) движение внутри возмущенной области установившееся;
- 3) размер возмущенной области определяется из уравнения материального баланса.

Рассмотрим случай, когда скважина радиуса  $R_c$  эксплуатируется с постоянным дебитом  $Q_{am}$ . Возмущенной областью является круговая область радиусом  $R(t)$ , внутри которой фильтрация подчиняется стационарному закону:

$$P(r, t) = \sqrt{P_k^2 - \frac{P_k^2 - P_c^2}{\ln \frac{R(t)}{R_c}} \ln \frac{R(t)}{r}}, \quad R_c \leq r \leq R(t).$$

Вне возмущенной области:

$$P = P_k, \quad r > R(t).$$

В возмущенной области справедливо также выражение для дебита:

$$Q_{am} = \frac{\pi K h (P_k^2 - P_c^2)}{\mu P_{am} \ln \frac{R(t)}{R_c}},$$

откуда

$$\frac{P_k^2 - P_c^2}{\ln \frac{R(t)}{R_c}} = \frac{Q_{am} P_{am} \mu}{\pi K h}.$$

Закон движения границы возмущенной области:



$$R(t) = \sqrt{4\bar{\chi}t + R_c^2} \approx 2\sqrt{\bar{\chi}t}.$$

С учетом приведенных соотношений давление в любой точке пласта в любой момент времени составит:

$$\begin{cases} P(r, t) = \sqrt{P_{\kappa}^2 - \frac{Q_{am} P_{am} \mu}{\pi K h} \ln \frac{\sqrt{4\bar{\chi}t + R_c^2}}{r}}, & R_c \leq r \leq \sqrt{4\bar{\chi}t + R_c^2}; \\ P = P_{\kappa}, & r > \sqrt{4\bar{\chi}t + R_c^2}. \end{cases} \quad (8.7)$$

Изменение давления на забое скважины определится из соотношения:

$$P_c(t) = \sqrt{P_{\kappa}^2 - \frac{Q_{am} P_{am} \mu}{\pi K h} \ln \frac{\sqrt{4\bar{\chi}t + R_c^2}}{R_c}}.$$

Формулы (8.7) пригодны также для конечного открытого или замкнутого пласта радиусом  $R_k$ , причем годятся они только для первой фазы движения, пока воронка депрессии не достигнет границы пласта ( $R(t) \leq R_k$ ).

Изменение давления во второй фазе зависит от типа газового пласта. Если он замкнут, то давление будет снижаться и в дальнейшем, включая границу пласта.

Если пласт открытый, т.е. режим водонапорный, то во второй фазе установится стационарный режим с постоянной депрессией  $P_{\kappa} - P_c$ .

#### 8.4. Принцип суперпозиции в задачах неустановившейся фильтрации газа

С помощью данного принципа выведем формулу восстановления забойного давления после остановки газовой скважины и определим коллекторские свойства пласта.

Предположим, что газовая скважина в бесконечном пласте эксплуатировалась в течение длительного промежутка времени  $T$  с постоянным дебитом  $Q_{am}$ , и в момент времени  $T$  была внезапно остановлена, т.е. приток газа к забою мгновенно прекратился.

Используя принцип суперпозиции, будем считать, что в момент  $t=T$  в дополнение к добывающей скважине, продолжающей работать с дебитом  $Q_{am}$ , начала работать нагнетательная скважина с таким же дебитом.

Тогда справедливо выражение:

$$P_k^2 - P_c^2(t) = \frac{Q_{am} P_{am} \mu}{2\pi K h} \left[ \ln \frac{2,25 \bar{\chi} t}{R_c^2} - \ln \frac{2,25 \bar{\chi} (t - T)}{R_c^2} \right]. \quad (8.8)$$

Кроме того, в момент остановки скважины выполняется равенство:

$$P_k^2 - P_c^2(T) = \frac{Q_{am} P_{am} \mu}{2\pi K h} \ln \frac{2,25 \bar{\chi} T}{R_c^2}. \quad (8.9)$$

Вычитая из уравнения (8.9) уравнение (8.8), получим:

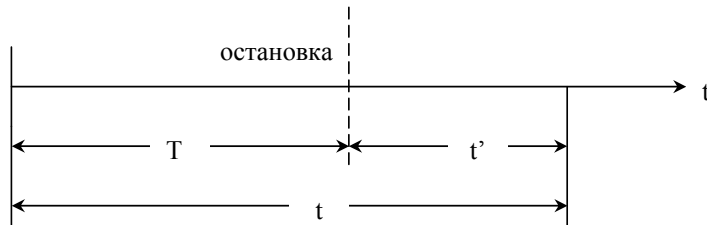
$$P_c^2(t) - P_c^2(T) = \frac{Q_{am} P_{am} \mu}{2\pi K h} \left[ \ln \frac{2,25 \bar{\chi} (t - T)}{R_c^2} - \ln \frac{t}{T} \right].$$

Если скважина работала до остановки в течение длительного времени и  $t - T \ll T$ , то членом  $\ln \frac{t}{T}$  можно пренебречь.

Тогда имеем:

$$P_c^2(t) - P_c^2(T) = \frac{Q_{am} P_{am} \mu}{2\pi K h} \ln \frac{2,25 \bar{\chi} (t - T)}{R_c^2}. \quad (8.10)$$

Примем момент остановки скважины  $T$  за новое начало отсчета времени  $T=0$ . Время после остановки составит  $t' = t - T$ .



Тогда формула (8.10) запишется в виде:

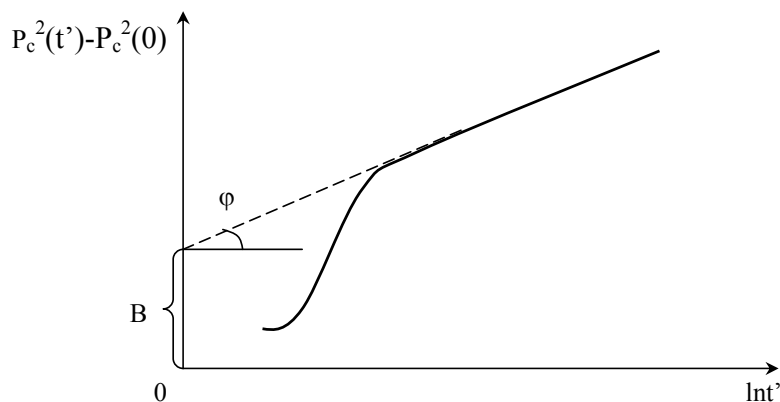
$$P_c^2(t') - P_c^2(0) = \frac{Q_{am} P_{am} \mu}{2\pi K h} \ln \frac{2,25 \bar{\chi} t'}{R_c^2} = A \ln t' + B,$$

где

$$A = \frac{Q_{am} P_{am} \mu}{2\pi K h} = \operatorname{tg} \varphi ,$$

$$B = \frac{Q_{am} P_{am} \mu}{2\pi K h} \ln \frac{2,25 \bar{\chi}}{R_c^2} = A \ln \frac{2,25 \bar{\chi}}{R_c^2} .$$

При исследовании газовых скважин на неустановившихся режимах определяют значения  $P_c$  в разные моменты времени  $t'$  после остановки скважины, и полученные данные обрабатывают в полулогарифмических координатах. Кривая восстановления давления при этом выглядит следующим образом:



С помощью коэффициента  $A$  рассчитывают гидропроводность пласта:

$$\varepsilon = \frac{K h}{\mu} = \frac{Q_{am} P_{am}}{2\pi A} .$$

Зная  $B$ , находят параметр  $\frac{\bar{\chi}}{R_c^2} = \frac{1}{2,25} e^{\frac{B}{A}} .$

### 8.5. Отбор газа из замкнутого пласта

Пусть имеется замкнутая круговая залежь радиусом  $R_k$ . В центре находится скважина радиусом  $R_c$ . До вскрытия пласта скважиной давление во всей залежи постоянно и равно  $P_n$ .

В этом случае задача об отборе газа решается методом ПССС с использованием уравнения истощения газовой залежи.

**Уравнение истощения газовой залежи** (материального баланса) заключается в том, что количество газа, извлеченного из пласта за некоторый промежуток времени, равно уменьшению запасов газа в пласте. Так как пласт замкнут, то запасы ограничены и не пополняются извне.

Уменьшение запасов газа за бесконечно малый промежуток времени запишется в виде:

$$-V_{nop}d\tilde{\rho} = -V_{nop}d\left(\frac{\rho_{am}\tilde{P}}{P_{am}}\right) = -\frac{\rho_{am}}{P_{am}}V_{nop}d\tilde{P},$$

где  $\tilde{\rho}$  - плотность идеального газа, соответствующая средневзвешенному давлению в пласте  $\tilde{P}$ ;  $V_{nop}=const$  – объем порового пространства.

Отобранная масса газа за тот же промежуток времени:

$$Q_m(t)dt = \rho_{am}Q_{am}(t)dt.$$

Приравнивая правые части обоих выражений, получим дифференциальное уравнение истощения газовой залежи:

$$-V_{nop}d\tilde{P} = P_{am}Q_{am}(t)dt. \quad (8.11)$$

Поскольку  $\tilde{P} \approx P_{\kappa}$ , то

$$-V_{nop}dP_{\kappa} = P_{am}Q_{am}(t)dt. \quad (8.12)$$

**Случай I.** Отбор газа производится с постоянным дебитом  $Q_{am}$ .

Из уравнения (8.12) имеем:

$$dP_{\kappa} = -\frac{P_{am}Q_{am}}{V_{nop}}dt.$$

Интегрируя это уравнение и учитывая, что  $P=P_n$  при  $t=0$ , получим:

$$P_{\kappa} = P_n - \frac{P_{am}Q_{am}}{V_{nop}}t, \quad (8.13)$$

то есть давление на границе пласта изменяется с течением времени по линейному закону.

Чтобы найти закон изменения *забойного* давления с течением времени, запишем формулу для определения дебита скважины:

$$Q_{am} = \frac{\pi K h (P_k^2 - P_c^2)}{P_{am} \mu \ln \frac{R_k}{R_c}}. \quad (8.14)$$

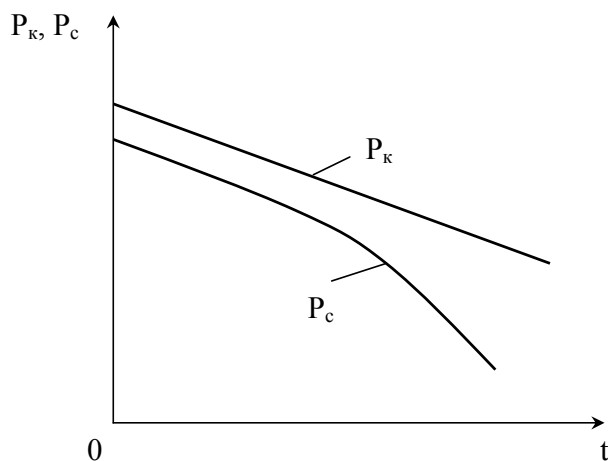
Выразим из нее забойное давление:

$$P_c = \sqrt{P_k^2 - \frac{Q_{am} P_{am} \mu}{\pi K h} \ln \frac{R_k}{R_c}},$$

откуда с учетом выражения (8.12) найдем:

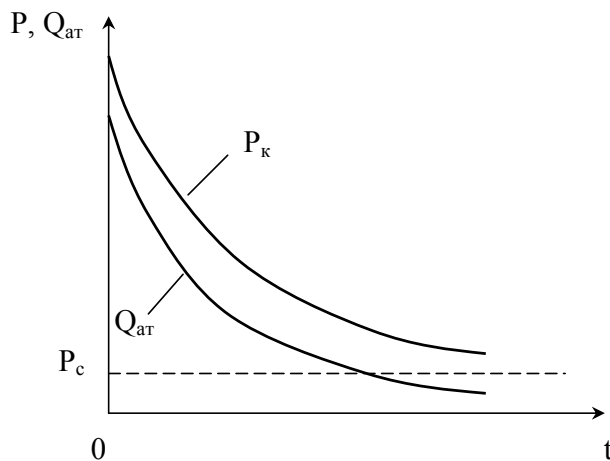
$$P_c = \sqrt{\left( P_n - \frac{P_{am} Q_{am}}{V_{nop}} t \right)^2 - \frac{Q_{am} P_{am} \mu}{\pi K h} \ln \frac{R_k}{R_c}}.$$

График изменения  $P_k$  и  $P_c$  со временем выглядит следующим образом:



**Случай II.** Забойное давление постоянно,  $P_c = const$ .

График изменения  $P_k$  и  $Q_{am}$  со временем выглядит следующим образом:



### **Контрольные вопросы:**

46. Выведите и проанализируйте дифференциальное уравнение Лейбензона.
47. Охарактеризуйте способы линеаризации уравнения Лейбензона.
48. Приведите линеаризованное уравнение Лейбензона и его основное решение для плоскорадиальной фильтрации газа.
49. По какому принципу можно получить формулу распределения давления для неустановившегося притока газа к скважине?
50. В чем заключается формальная аналогия между фильтрацией упругой жидкости и неустановившимся потоком идеального газа?
51. Как с помощью метода ПССС получить закон распределения давления в газовом пласте?
52. Выведите формулу восстановления забойного давления после остановки газовой скважины с помощью принципа суперпозиции. Как можно ее использовать для интерпретации исследований газовых скважин?
53. Что собой представляет уравнение истощения газовой залежи?
54. Охарактеризуйте отбор газа из замкнутого пласта, если: а) отбор производится с постоянным дебитом; б) на забое скважины поддерживается постоянное давление.

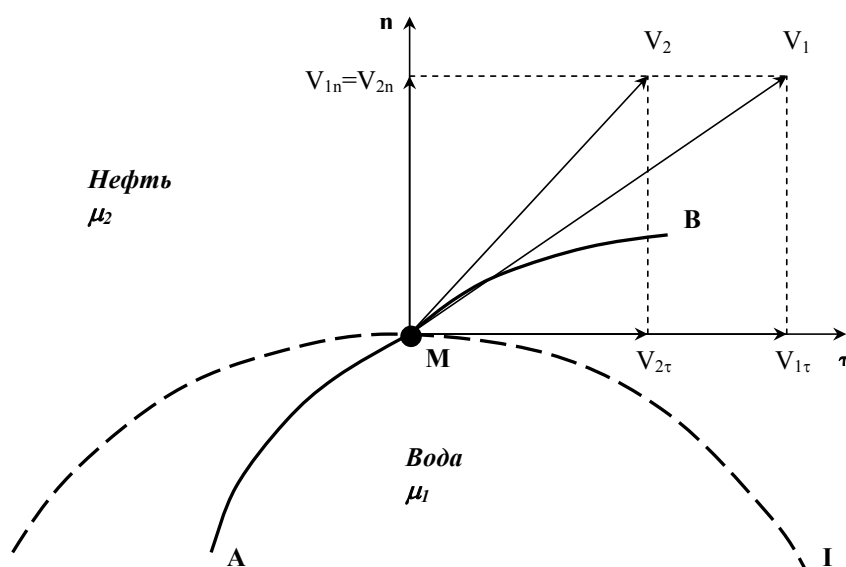
## 9. ПОРШНЕВОЕ ВЫТЕСНЕНИЕ НЕФТИ ВОДОЙ. ДВИЖЕНИЕ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ПРИ ВЗАИМНОМ ВЫТЕСНЕНИИ ЖИДКОСТЕЙ

Задача о движении границы раздела двух жидкостей с различными физическими свойствами (вязкостью и плотностью) возникает:

- а) при разработке нефтяных месторождений в условиях водонапорного режима, когда наблюдается стягивание контура нефтеносности под напором краевых (закачиваемых) вод;
- б) при разработке водонефтяных зон месторождений;
- в) при разработке газовых месторождений с активной краевой или подошвенной водой;
- г) при создании и эксплуатации подземных хранилищ газа в водоносных пластах и истощенных обводненных нефтяных залежах.

### 9.1. Кинематические условия на подвижной границе раздела при взаимном вытеснении жидкостей

На границе раздела жидкостей происходит преломление линий тока. Покажем это на схеме.



На данной схеме линия  $I-I$  - это граница раздела двух жидкостей с вязкостями  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , причем  $\mu_2 > \mu_1$  (нефть вытесняется водой).

Точка  $M$  на границе  $I-I$  выбрана произвольно, и через нее проведены касательная  $\tau$  и нормаль  $n$  к линии  $I-I$ .

Проницаемость пористой среды  $K$  постоянна по обе стороны границы раздела.

Соотношение проекций скоростей фильтрации воды и нефти, находящихся в данный момент в точке  $M$ , следующее:

$V_{1n} = V_{2n}$  согласно условию неразрывности потока, при котором элементарные расходы обеих несжимаемых жидкостей через элемент границы раздела, включающий точку  $M$ , равны между собой.

Касательные составляющие скоростей фильтрации определяются по закону Дарси:

$$\left. \begin{aligned} V_{1\tau} &= -\frac{K}{\mu_1} \frac{\partial P}{\partial \tau}, \\ V_{2\tau} &= -\frac{K}{\mu_2} \frac{\partial P}{\partial \tau}. \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

Так как  $\mu_2 > \mu_1$ , то  $V_{2\tau} < V_{1\tau}$ .

Отсюда следует, что результирующий вектор скорости фильтрации  $V_1$  будет больше вектора  $V_2$ .

Векторы скоростей фильтрации являются касательными к линиям тока. Следовательно, линии тока воды  $AM$  и нефти  $MB$ , проходящие через точку  $M$ , будут иметь излом в точке  $M$ . Учет этого преломления затрудняет точное решение задачи о продвижении границы раздела.

Линии тока не преломляются только в двух случаях – при прямолинейно-параллельном и плоскорадиальном движениях границы раздела, когда  $V_{2\tau} = V_{1\tau} = 0$ .

## 9.2. Прямолинейно-параллельное и плоскорадиальное поршневое вытеснение нефти водой

Модель поршневого вытеснения нефти водой предполагает наличие четко выраженной границы раздела между двумя несжимаемыми, взаимно нерастворимыми и химически инертными по отношению друг к другу и к породе жидкостями. Вытеснение, или замещение, одной жидкости другой (нефти водой) происходит полностью.

Рассмотрим случай, когда в начальный момент времени плоскость контакта воды и нефти вертикальна. Плотности нефти и воды будем считать одинаковыми.

Схемы прямолинейно-параллельного и плоскорадиального вытеснения показаны на рис. 9.1 и 9.2.

Обозначения следующие:

I – вода; II – зона замещения нефти водой; III – нефть.

$x_0, R_0$  – начальное положение контура нефте(водо)носности;

$x_e(t), r_e(t)$  – текущее положение контура нефтеносности в момент времени  $t$  после начала вытеснения.

Обозначим также:

$P_e, P_n$  – давление в любой точке водоносной и нефтеносной части пласта;



$P(t)$  – давление на границе раздела «вода-нефть» с координатой  $X_6(t)$  или  $r_6(t)$ .

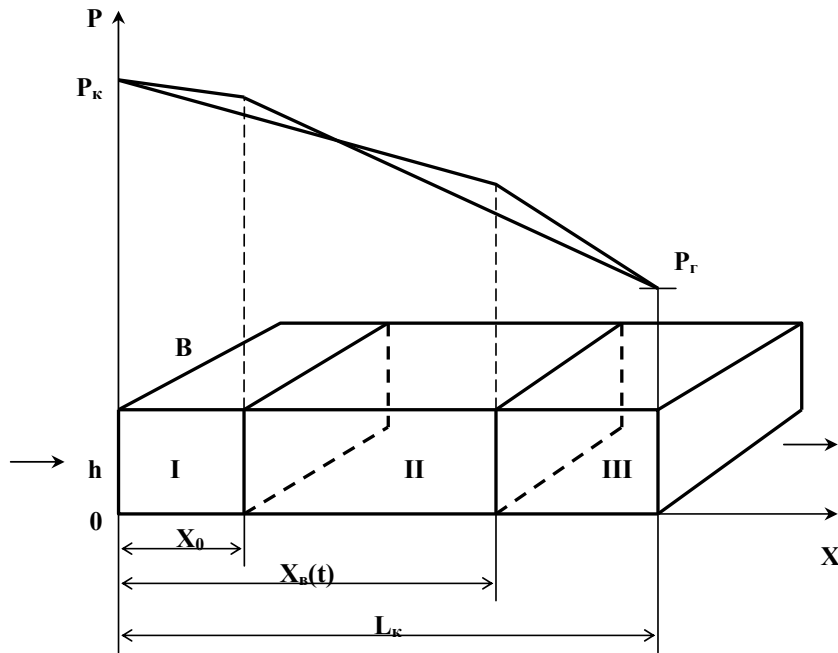
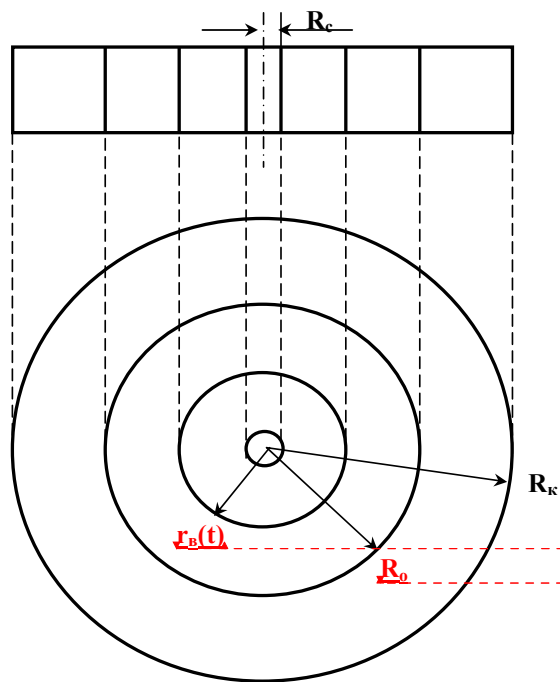


Рис. 9.1. Схема прямолинейно-параллельного вытеснения нефти водой



Удалено:  $R_0$   
 Отформатировано  
 Удалено:  $r_в(t)$   
 Отформатировано

Рис. 9.2. Схема плоскорадиального вытеснения нефти водой

### 9.3. Сравнительная характеристика потоков

Характеристика	Прямолинейно-параллельный поток	Плоскорадиальный поток
Распределение давления в водоносной и нефтеносной областях	$P_{\theta} = P_{\kappa} - \frac{\mu_{\theta}(P_{\kappa} - P_{\zeta})}{\mu_{\theta}x_{\theta}(t) + \mu_{\eta}(L_{\kappa} - x_{\theta}(t))}x$	$P_{\theta} = P_{\kappa} - \frac{\mu_{\theta}(P_{\kappa} - P_{\zeta})}{\mu_{\theta} \ln \frac{R_{\kappa}}{r_{\theta}(t)} + \mu_{\eta} \ln \frac{r_{\theta}(t)}{R_{\zeta}}} \ln \frac{R_{\kappa}}{r}$
	$P_{\eta} = P_{\zeta} + \frac{\mu_{\eta}(P_{\kappa} - P_{\zeta})}{\mu_{\theta}x_{\theta}(t) + \mu_{\eta}(L_{\kappa} - x_{\theta}(t))}(L_{\kappa} - x)$	$P_{\eta} = P_{\zeta} + \frac{\mu_{\eta}(P_{\kappa} - P_{\zeta})}{\mu_{\theta} \ln \frac{R_{\kappa}}{r_{\theta}(t)} + \mu_{\eta} \ln \frac{r_{\theta}(t)}{R_{\zeta}}} \ln \frac{r}{R_{\zeta}}$
Скорость фильтрации	$V_{\theta} = V_{\eta} = \frac{K(P_{\kappa} - P_{\zeta})}{\mu_{\theta}x_{\theta}(t) + \mu_{\eta}(L_{\kappa} - x_{\theta}(t))}$	$V_{\theta} = V_{\eta} = \frac{K(P_{\kappa} - P_{\zeta})}{\mu_{\theta} \ln \frac{R_{\kappa}}{r_{\theta}(t)} + \mu_{\eta} \ln \frac{r_{\theta}(t)}{R_{\zeta}}} \cdot \frac{1}{r}$
Дебит галереи (скважины)	$Q = \frac{K(P_{\kappa} - P_{\zeta})}{\mu_{\theta}x_{\theta}(t) + \mu_{\eta}(L_{\kappa} - x_{\theta}(t))} \cdot Bh$	$Q = \frac{2\pi Kh(P_{\kappa} - P_{\zeta})}{\mu_{\theta} \ln \frac{R_{\kappa}}{r_{\theta}(t)} + \mu_{\eta} \ln \frac{r_{\theta}(t)}{R_{\zeta}}}$
Градиент давления	$\frac{\partial P_{\theta}}{\partial x} = - \frac{\mu_{\theta}(P_{\kappa} - P_{\zeta})}{\mu_{\theta}x_{\theta}(t) + \mu_{\eta}(L_{\kappa} - x_{\theta}(t))}$	$\frac{\partial P_{\theta}}{\partial r} = - \frac{\mu_{\theta}(P_{\kappa} - P_{\zeta})}{\mu_{\theta} \ln \frac{R_{\kappa}}{r_{\theta}(t)} + \mu_{\eta} \ln \frac{r_{\theta}(t)}{R_{\zeta}}} \cdot \frac{1}{r}$
	$\frac{\partial P_{\eta}}{\partial x} = - \frac{\mu_{\eta}(P_{\kappa} - P_{\zeta})}{\mu_{\theta}x_{\theta}(t) + \mu_{\eta}(L_{\kappa} - x_{\theta}(t))}$	$\frac{\partial P_{\eta}}{\partial r} = - \frac{\mu_{\eta}(P_{\kappa} - P_{\zeta})}{\mu_{\theta} \ln \frac{R_{\kappa}}{r_{\theta}(t)} + \mu_{\eta} \ln \frac{r_{\theta}(t)}{R_{\zeta}}} \cdot \frac{1}{r}$
Закон движения границы раздела	$t = \frac{m}{K(P_{\kappa} - P_{\zeta})} [\mu_{\eta}L_{\kappa}(x_{\theta} - x_0) - \frac{1}{2}(\mu_{\eta} - \mu_{\theta})(x_{\theta}^2 - x_0^2)]$	$t = \frac{m}{2K(P_{\kappa} - P_{\zeta})} [(\mu_{\theta} \ln R_{\kappa} - \mu_{\eta} \ln R_{\zeta}) \times \times (R_0^2 - r_{\theta}^2) + (\mu_{\eta} - \mu_{\theta})(R_0^2 \ln R_0 - - r_{\theta}^2 \ln r_{\theta}) - \frac{\mu_{\eta} - \mu_{\theta}}{2}(R_0^2 - r_{\theta}^2)]$
Время полного вытеснения нефти	$T = \frac{m}{2K(P_{\kappa} - P_{\zeta})} [\mu_{\theta}(L_{\kappa}^2 - x_0^2) + + \mu_{\eta}(L_{\kappa} - x_0)^2]$	$T = \frac{m}{2K(P_{\kappa} - P_{\zeta})} [(\mu_{\theta} \ln R_{\kappa} - \mu_{\eta} \ln R_{\zeta}) \times \times (R_0^2 - R_{\zeta}^2) + (\mu_{\eta} - \mu_{\theta})(R_0^2 \ln R_0 - - R_{\zeta}^2 \ln R_{\zeta}) - \frac{\mu_{\eta} - \mu_{\theta}}{2}(R_0^2 - R_{\zeta}^2)]$

Все эти формулы получены путем следующих рассуждений. Изобарами являются линии, параллельные галерее или соосные контуру питания. Принимая за галерею изобару, совпадающую с границей раздела жидкостей, можно записать распределение давления и скорость фильтрации в водоносной области, используя соотношения для установившейся фильтрации однородной несжимаемой жидкости. Аналогичным образом можно записать распределение давления и скорость фильтрации в нефтеносной области, только теперь изобара, совпадающая с границей раздела жидкостей, принимается за контур питания. Скорости фильтрации  $V_{\theta}$  и  $V_{\eta}$  приравняются и находится давление

$P(t)$  на границе раздела жидкостей. Далее определяются все основные характеристики потоков.

#### *Анализ соотношений*

##### **Прямолинейно-параллельное вытеснение**

1. Давление в пласте зависит не только от координаты  $x$ , но и от координаты границы раздела  $x_g$ , которая со временем увеличивается. Следовательно, пластовое давление, изменяясь по линейному закону, в водоносной области со временем падает, а в нефтеносной – растет.

2. Если выразить из закона движения границы раздела  $x_g$  и полученное выражение подставить в формулы для определения скорости и дебита, то окажется, что эти параметры также изменяются во времени. Следовательно, несмотря на постоянство депрессии  $\Delta P = P_k - P_z$  движение жидкостей в пласте будет неустановившимся

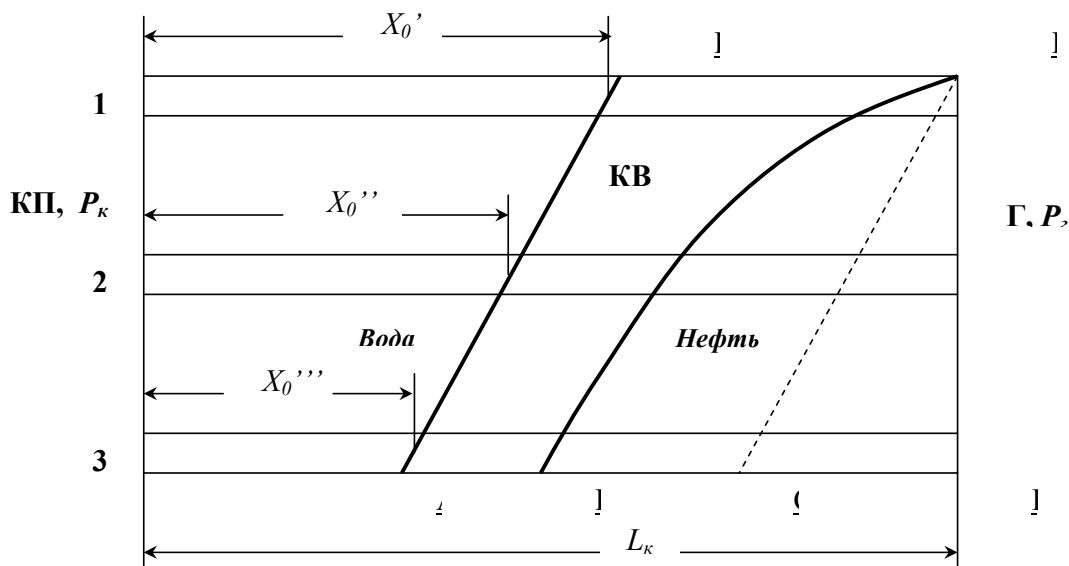
При  $\mu_n > \mu_v$  скорость фильтрации и дебит галереи увеличиваются с течением времени, т.е. по мере продвижения контура нефтеносности. Физически это связано с уменьшением размеров нефтеносной зоны, где сопротивление движению значительно выше.

3. Градиенты давления в водоносной и нефтеносной областях, также зависящие от  $x_g$ , с течением времени увеличиваются. В нефтеносной области градиент давления больше, чем в водоносной, во столько раз, во сколько  $\mu_n > \mu_v$ .

##### Плоскорадиальное вытеснение

И в данном случае имеют место аналогичные выводы. Только закон распределения давления вдоль радиуса-вектора в обеих зонах логарифмический.

#### **9.4. Устойчивость движения границы раздела двух жидкостей**



Различие вязкостей нефти и воды оказывает влияние не только на время извлечения нефти, но и на характер продвижения контура водоносности.

Допустим, что ВНК, начальное положение которого представлено линией АВ, не параллелен добывающей галерее DE. Для решения задачи о продвижении контура водоносности в указанных условиях используем следующий приближенный метод. Выделим в пласте несколько узких полос, например, полосы 1, 2, 3. Тогда в каждой из таких полос можно считать, что контур водоносности параллелен галерее DE и находится на расстоянии от контура питания соответственно  $x_0'$ ,  $x_0''$ ,  $x_0'''$ . Значит, для каждой из таких полос (трубок тока) можно использовать формулы, справедливые для параллельного галерее ВНК.

Из формулы для определения скорости следует, что чем больше  $x_0$ , тем больше скорость фильтрации  $V$ . Отсюда вытекает, что частицы воды из точки В будут продвигаться с большей скоростью к точке D, чем частицы воды из точки А к точке Е.

Аналогичным образом для полосы 1 можно рассчитать время  $T'$ , за которое частицы воды из точки В дойдут до точки D. Это – время начала обводнения добывающей галереи. Подставляя полученное значение в формулу для нахождения текущей координаты контура водоносности, можно определить величины  $x_0''$  и  $x_0'''$ , т.е. положение ВНК в момент времени  $T'$ .

Линия KD на рисунке показывает положение контура водоносности в полосах 2 и 3 в момент времени  $T'$ , когда в точке D появилась вода.

Если бы вязкости нефти и воды были одинаковы, то скорости движения жидкости во всех точках пласта тоже были бы одинаковы. Контур водоносности передвигался бы параллельно линии АВ и к началу обводнения галереи занял положение CD. Площадь вытеснения нефти ABDC в этом случае была бы больше фактической (ABDK).

Вывод.

Скорость движения «водяного языка» в наиболее выдвинутой точке по мере его приближения к галерее (зоне отбора) увеличивается, т.е. раз образовавшийся язык в дальнейшем быстро вытягивается, продвигаясь с гораздо большей скоростью, чем основная часть контура водоносности. Это – явление так называемой «вязкостной неустойчивости», которое учитывается в расчетах процесса обводнения реальных залежей.

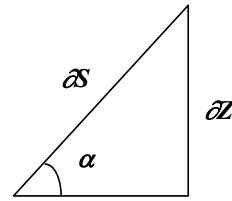
*Учет различия плотностей*

Если пласт имеет угол наклона к горизонту, то граница раздела жидкостей, имеющая горизонтальное начальное положение, в процессе разработки деформируется за счет разностей плотностей нефти и воды. Скорости фильтрации каждой жидкости согласно закону Дарси определяются с учетом силы тяжести по формулам:

$$\begin{aligned} V_n &= -\frac{K}{\mu_n} \left( \frac{\partial P}{\partial S} + \rho_n g \frac{\partial z}{\partial S} \right), \\ V_g &= -\frac{K}{\mu_g} \left( \frac{\partial P}{\partial S} + \rho_g g \frac{\partial z}{\partial S} \right). \end{aligned} \quad (9.2)$$

Здесь  $S$  – расстояние вдоль выделенной трубки тока;  
 $\alpha$  – угол наклона пласта к горизонту.

$$\frac{\partial z}{\partial S} = \sin \alpha.$$



Вследствие возмущений на границе раздела частицы воды попадают в область, занятую нефтью. При этом их дальнейшее движение может либо ускоряться, либо замедляться. При ускорении движения частиц воды движение границы раздела будет неустойчивым, при замедлении – устойчивым.

Об устойчивости движения границы раздела можно судить по разности скоростей фильтрации. Для этого выразим из уравнений (9.2) градиент давления и приравняем полученные выражения:

$$-\frac{\partial P}{\partial S} = \frac{\mu_g}{K} V_g + \rho_g g \frac{\partial z}{\partial S} = \frac{\mu_n}{K} V_n + \rho_n g \frac{\partial z}{\partial S}.$$

Отсюда

$$V_g = \frac{\mu_n}{\mu_g} V_n - \frac{K}{\mu_g} (\rho_g - \rho_n) g \frac{\partial z}{\partial S} = \frac{\mu_n}{\mu_g} V_n - \frac{K}{\mu_g} (\rho_g - \rho_n) g \sin \alpha.$$

Разность скоростей фильтрации:

$$\Delta V = V_g - V_n = V_n \left( \frac{\mu_n}{\mu_g} - 1 \right) - \frac{K}{\mu_g} (\rho_g - \rho_n) g \sin \alpha. \quad (9.3)$$

При  $\Delta V \leq 0$  движение границы раздела устойчиво, при  $\Delta V > 0$  движение неустойчиво.

Для выполнения этого условия скорость фильтрации нефти  $V_n$  на границе раздела должна быть:

$$V_n \leq \frac{K}{\mu_n - \mu_g} (\rho_g - \rho_n) g \sin \alpha. \quad (9.4)$$

Более строгое исследование рассмотренной задачи проводится методами теории возмущений и гидродинамической устойчивости.

### 9.5. Конусообразование.

#### Предельный безводный дебит скважины.

При отборе нефти из гидродинамически несовершенной по степени вскрытия скважины в пласте с подошвенной водой происходит деформация поверхности ВНК. Образующееся повышение уровня воды называется **конусом подошвенной воды**.

И.А.Чарный, используя условие устойчивости движения границы раздела двух жидкостей, получил формулу для расчета предельного безводного дебита скважины  $Q_{np}$ , т.е. максимального дебита, при котором не происходит прорыва подошвенной воды в скважину.

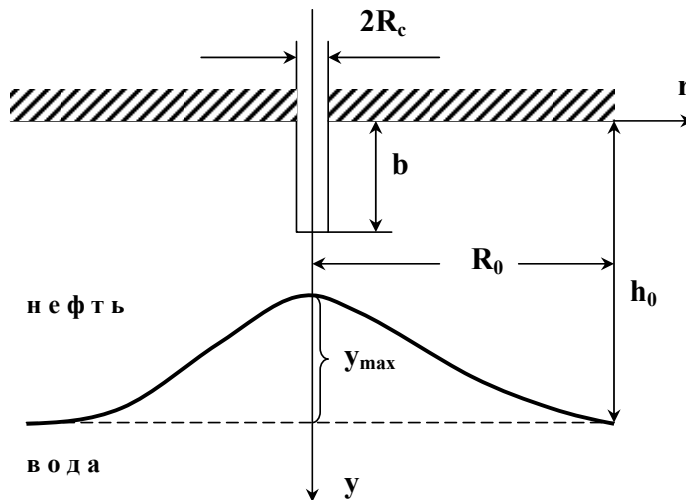


Рис. 9.3. Схема образования конуса подошвенной воды

$$Q_{np} = Q_0 \cdot q(\bar{h}; \rho) = \frac{2\pi k h_0^2}{\mu_n} (\rho_e - \rho_n) g \cdot q(\bar{h}; \rho), \quad (9.5)$$

где  $q(\bar{h}; \rho)$  - безразмерный дебит, значения которого определяются по графику.

Вспомогательные параметры:

$$\bar{h} = \frac{b}{h_0}; \quad \rho = \frac{R_0}{\chi_A h_0}.$$

Здесь  $\chi_A$  - коэффициент анизотропии пласта, определяемый через соотношение проницаемостей по горизонтали и по вертикали:  $\chi_A = \sqrt{\frac{k_z}{k_r}}$ .

Если дебит скважины не больше предельного безводного дебита, то в процессе эксплуатации происходит равномерный подъем ВНК и вытеснение нефти к забою.

Увеличение дебита сверх расчетного значения приводит к быстрому прорыву подошвенной воды в скважину и резкому обводнению добываемой продукции.

Для расчета высоты подъема конуса  $y_{max}$ , соответствующей предельному безводному дебиту скважины, используется график зависимости  $\eta_{max}(\bar{h}; \rho)$ .

$$y_{\max} = \eta_{\max}(\bar{h}; \rho) \cdot (h_0 - b).$$

Предельно допустимую депрессию рассчитывают по формуле Маскета для скважины, несовершенной по степени вскрытия:

$$\Delta P_{np} = \frac{Q_{np} \mu_n \left\{ \frac{1}{2\bar{h}} \left[ 2 \ln \frac{4h_0}{R_c} - \varphi(\bar{h}) \right] + \ln \frac{R_0}{4h_0} \right\}}{2\pi k h_0}. \quad (9.6)$$

Количество нефти, которое будет отобрано из скважины к моменту ее обводнения, т.е. когда к забою подтянется конус подошвенной воды, приближенно можно определить по формуле:

$$\tau_n = \alpha m h^3 \frac{K_z}{K_g} D, \quad (9.7)$$

где  $\alpha$  - произведение коэффициента нефтеотдачи пласта на коэффициент усадки нефти;  $m$  - коэффициент пористости пласта;  $K_z$  и  $K_g$  - коэффициенты проницаемости пласта в вертикальном и горизонтальном направлениях;  $D$  - поправочный коэффициент, зависящий от относительной глубины вскрытия нефтенасыщенной части пласта  $f=b/h$ .

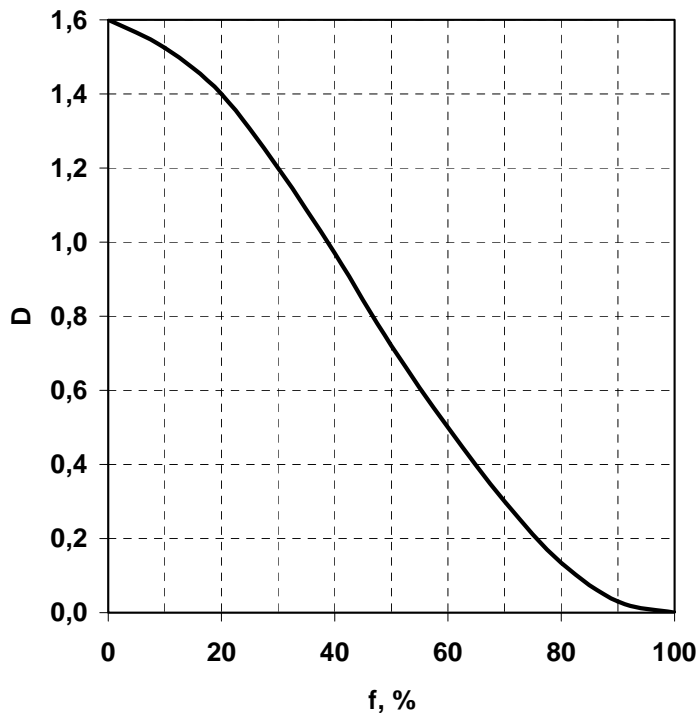


Рис. 9.5. График зависимости поправочного коэффициента  $D$  от относительной глубины  $f$  вскрытия нефтенасыщенной части пласта

Формулу (9.7) можно использовать только тогда, когда гидродинамически совершенные по характеру вскрытия пласта скважины расположены друг от друга на столь большом расстоянии  $2\sigma$ , что

$$\frac{\sigma}{h} \sqrt{\frac{K_g}{K_z}} > 3,5.$$

Это условие выполняется в большинстве практически интересных случаев.

Теоретические расчеты показывают, что при довольно значительной толщине нефтенасыщенной части пласта, небольшом относительном вскрытии, малом понижении давления и, соответственно, малом дебите скважина должна обводниться за сравнительно короткий промежуток времени.

Однако на практике нередки случаи, когда достаточно многодебитные скважины, расположенные в водонефтяной зоне, длительное время эксплуатируются без воды. Кроме того, установка цементных мостов, поднимающих забой скважины на несколько метров, способна отодвинуть момент обводнения на несколько месяцев.

Увеличение значения  $\tau_n$  в реальных условиях может быть получено лишь за счет увеличения соотношения проницаемостей. Для одного и того же образца породы величина  $K_z$  превосходит величину  $K_g$  не более чем в 1,5-3 раза. Однако, если срок обводнения скважины велик, проницаемость по напластованию должна превосходить вертикальную проницаемость в десятки и даже сотни раз. Такого резкого различия проницаемостей  $K_z$  и  $K_g$  для каждого керна ожидать нельзя. Однако во многих случаях в пластах обнаруживаются тонкие прослойки, а иногда пропластки глин или плохо проницаемых мергелей, которые способны резко снизить *среднюю* проницаемость пласта в направлении, перпендикулярном напластованию.

Тонкие или мощные плохо проницаемые пропластки затрудняют поднятие конуса подошвенной воды и увеличивают период безводной эксплуатации скважины.

Отсюда следует вывод:

для борьбы с подтягиванием подошвенных вод действенным средством является установка цементных мостов, причем с таким расчетом, чтобы между уровнем подошвенных вод и верхней плоскостью цементного моста находились бы плохо проницаемые пропластки.



### **Контрольные вопросы:**

1. В чем заключается сущность поршневого вытеснения нефти водой?
2. Докажите, что на границе раздела двух жидкостей происходит преломление линий тока.
3. Приведите схему прямолинейно-параллельного поршневого вытеснения нефти водой и проанализируйте расчетные зависимости для определения основных характеристик потока.
4. Приведите схему плоскорадиального поршневого вытеснения нефти водой и проанализируйте расчетные зависимости для определения основных характеристик потока.
5. Как влияет различие вязкостей двух жидкостей на устойчивость движения границы раздела?
6. Как влияет различие плотностей двух жидкостей на устойчивость движения границы раздела?
7. Приведите схему образования конуса подошвенной воды.
8. Дайте определение предельного безводного дебита скважины и приведите его расчет по способу И.А.Чарного. Как можно оценить предельно допустимую депрессию?
9. Как влияет анизотропия пласта на темпы обводнения скважин подошвенной водой?
10. Перечислите способы изоляции подошвенной воды в скважинах.

## 10. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НЕПОРШНЕВОГО ВЫТЕСНЕНИЯ НЕФТИ ВОДОЙ

Модель поршневого вытеснения нефти водой позволяет рассчитать показатели разработки, близкие к реальным, только в том случае, если она сочетается с моделью слоисто-неоднородного пласта. Эта же модель, если ее рассматривать в сочетании с моделью однородного пласта, слишком упрощенно отражает картину разработки нефтяных месторождений с заводнением. В предположении, что пласт однороден, при использовании такой модели приходим к выводу, что разработка месторождения может полностью осуществляться без добычи воды. Это противоречит фактическим данным.

Рассмотрим другую модель – модель непоршневого вытеснения нефти водой, авторами которой являются американские исследователи Бэкли и Леверетт.

### 10.1. Уравнение неразрывности двухфазного течения

Уравнение неразрывности потока (баланса массы вещества в сплошной среде) при одномерном прямолинейно-параллельном движении однофазной жидкости имеет вид:

$$\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho m)}{\partial t} = 0.$$

Однако в нефтяных пластах, разрабатываемых при водонапорном режиме, вода не заполняет полностью область, первоначально занятую нефтью. В этой области происходит совместное движение двух жидкостей – вторгшейся воды и оставшейся, постепенно вымываемой нефти.

Рассматривая баланс вытесняющей жидкости (воды) в элементарном объеме пласта, получим уравнение неразрывности водной фазы:

$$\frac{\partial V_g}{\partial x} + m \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (10.1)$$

где  $S$  – насыщенность элемента водной фазой.

Уравнение неразрывности нефтяной фазы:

$$\frac{\partial V_n}{\partial x} - m \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (10.2)$$

Складывая уравнения (10.1) и (10.2), имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x}(V_g + V_n) = 0; \quad V_g + V_n = V(t).$$

Таким образом, суммарная скорость фильтрации нефти и воды не изменяется по координате  $x$ , поскольку нефть и воду можно считать несжимаемыми жидкостями.

Формула закона фильтрации Дарси в случае совместного прямолинейно-параллельного движения нефти и воды имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} V_n &= -\frac{KK_n(S)}{\mu_n} \frac{\partial P_n}{\partial x}, \\ V_e &= -\frac{KK_e(S)}{\mu_e} \frac{\partial P_e}{\partial x} \end{aligned} \right\}, \quad (10.3)$$

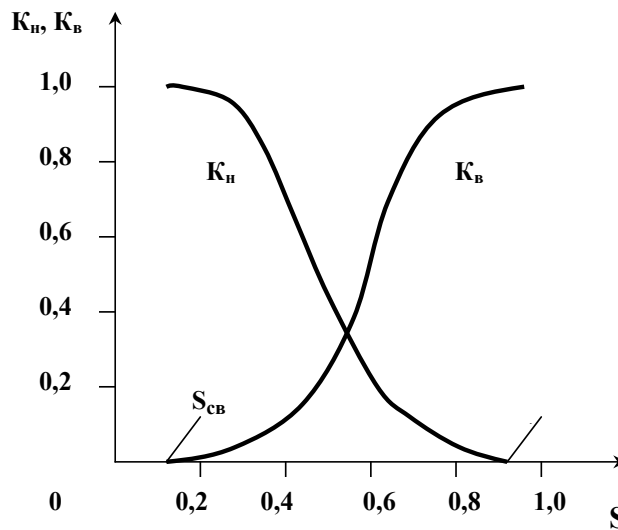
где  $K_n(S)$ ,  $K_e(S)$  – относительные проницаемости для нефти и воды, зависящие от водонасыщенности  $S$ ;  $P_n$ ,  $P_e$  – давления в нефти и воде.

Давления в фазах не совпадают из-за действия поверхностного натяжения и связаны равенством:

$$P_n - P_e = P_k,$$

где  $P_k$  – капиллярное давление (или капиллярный “скачок”).

Модель Бэкли-Лeverетта *пренебрегает капиллярным давлением, а также влиянием силы тяжести* на процесс вытеснения. Считается, что капиллярность косвенно учитывается видом кривых относительных фазовых проницаемостей:



Уравнения (10.1)-(10.3) образуют замкнутую систему, которую можно свести к одному уравнению для насыщенности.

Из системы (10.3) следует:

$$V(t) = V_n + V_e = -\frac{\partial P}{\partial x} \left[ \frac{KK_n(S)}{\mu_n} + \frac{KK_e(S)}{\mu_e} \right],$$

откуда

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{V(t)}{K \left[ \frac{K_n(S)}{\mu_n} + \frac{K_e(S)}{\mu_e} \right]}.$$

Подставим полученное выражение во второе уравнение системы (10.3) и получим:

$$V_{\varepsilon} = V(t) \cdot f(S), \quad (10.4)$$

где  $f(S)$  – функция Леверетта.

$$f(S) = \frac{K_{\varepsilon}(S)}{K_{\varepsilon}(S) + \frac{\mu_{\varepsilon}}{\mu_n} K_n(S)}.$$

Из уравнения (10.4), дифференцируя  $V_{\varepsilon}$  по  $x$ , получим:

$$\frac{\partial V_{\varepsilon}}{\partial x} = V(t) \cdot f'(S) \frac{\partial S}{\partial x}. \quad (10.5)$$

После подстановки уравнения (10.5) в уравнение (10.1), получим одно дифференциальное уравнение, которое называется *уравнением насыщенности*:

$$V(t) \cdot f'(S) \frac{\partial S}{\partial x} + m \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (10.6)$$

Решение уравнения (10.6) имеет вид:

$$x = x(S, 0) + \frac{V(t) \cdot t}{m} f'(S), \quad (10.7)$$

где  $x(S, 0)$  – первоначальное распределение насыщенности при  $t=0$ .

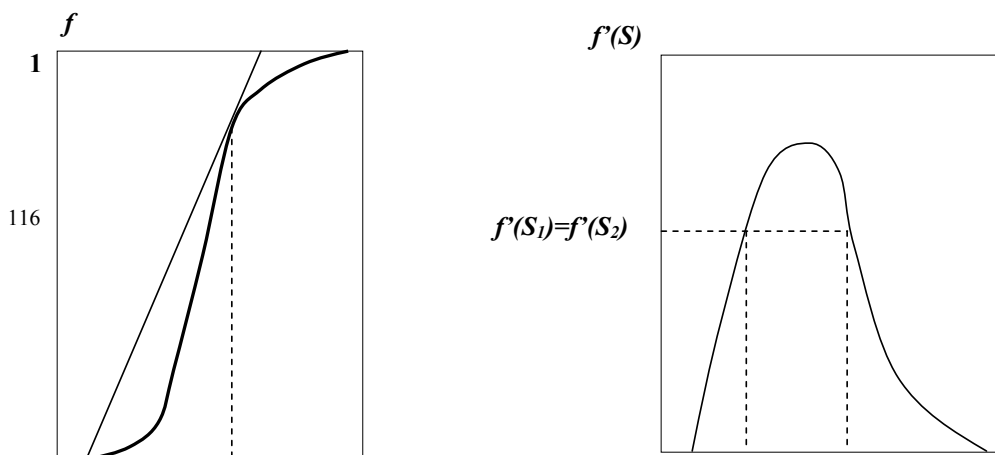
Зная положение точки с насыщенностью  $S$  в момент  $t=0$ , можно из уравнения (10.7) определить ее положение в любой момент времени  $t>0$ .

Из формулы (10.7) следует:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{V(t)}{m} f'(S). \quad (10.8)$$

Таким образом,  $\frac{V(t)}{m} f'(S)$  есть скорость распространения насыщенности заданной величины  $S$ .

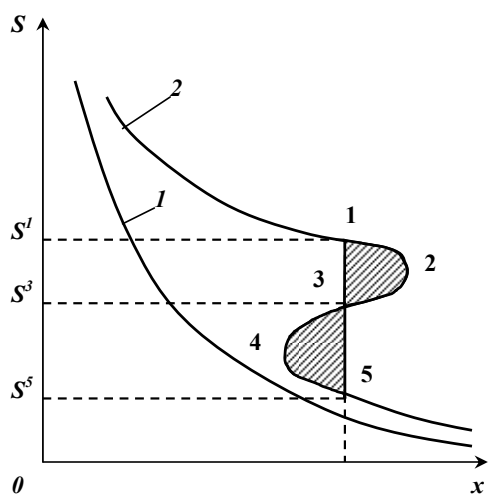
Вид кривых  $f(S)$  и  $f'(S)$  представлен на графиках:



Функция  $f'(S)$  не является монотонной. Иначе говоря, существуют две насыщенности  $S_1$  и  $S_2$ , распространяющиеся с одной и той же скоростью:

$$\frac{V}{m} f'(S_1) = \frac{V}{m} f'(S_2).$$

Следовательно, распределение насыщенности может оказаться многозначным, что физически невозможно.

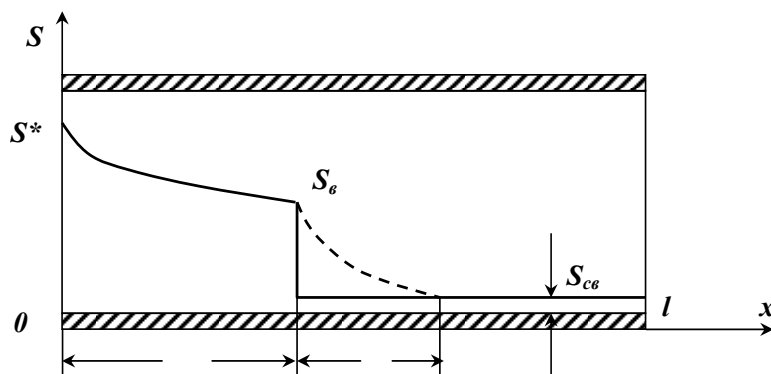


1 – физически возможное распределение насыщенности,  $S=S(x,0)$ ;  
2 – физически невозможное распределение насыщенности,  $S=S(x,t)$ ;

График  $S(x,t)$  оказывается неоднозначным в части 1-2-3-4-5. На выделенном участке одному и тому же значению  $x$  соответствуют три значения насыщенности  $S^1$ ,  $S^3$ ,  $S^5$ , что физически абсурдно, так как в каждом сечении в каждый момент времени должна существовать только одна насыщенность.

Данная многозначность устраняется введением «скачка насыщенности» – прямолинейный участок 1-3-5.

На схеме элемента пласта этот «скачок» отражается в следующем виде:



В действительности математический «скачок насыщенности» не имеет места. Существует некоторая конечная длина  $\delta$ , на которой насыщенность плавно снижается от  $S_g$  до  $S_{св}$  ( $S_g$  – водонасыщенность на фронте вытеснения,  $S_{св}$  – насыщенность связанной водой).

Размеры стабилизированной зоны  $\delta$  зависят от капиллярных эффектов, которые модель Бэкли-Леверетта не учитывает. Отсюда и возникновение «скачка».

## 10.2. Расчет показателей разработки на основе решения Бэкли-Леверетта

а) распределение водонасыщенности в пласте при  $0 \leq x \leq x_g$ , где  $x_g$  – координата фронта вытеснения, находят следующим образом:

$$f'(S) = \frac{mbhx}{Q(t)}, \quad (10.9)$$

где  $b$ ,  $h$  – геометрические параметры элемента пласта;  $Q(t)$  – суммарный объем воды, закачанной в пласт к моменту времени  $t$ ;

б) водонасыщенность на фронте вытеснения нефти водой, т.е. при  $x=x_g$ :

$$f'(S_g) = \frac{f(S_g)}{S_g - S_{св}}; \quad (10.10)$$

в) время начала обводнения продукции пласта:

$$t^* = \frac{mbhl}{q \cdot f'(S_g)} = \frac{V_n}{q \cdot f'(S_g)}, \quad (10.11)$$

где  $V_n$  – заводненый объем пор пласта;  $q$  – расход закачиваемой воды в единицу времени;

г) для определения показателей разработки пласта или его элемента в водный период эксплуатации, т.е. при  $t > t^*$ , используют соотношение:

$$\frac{f'(\bar{S})}{f'(S_g)} = \frac{t^*}{t}. \quad (10.12)$$

Имея график функции  $f'(S)$ , зная  $t^*$  и  $f'(S_g)$ , по графику находят  $f'(\bar{S})$  для различных моментов  $t$ , а затем – значение водонасыщенности  $\bar{S}$ ;

д) значение  $f(\bar{S})$  соответствует обводненности продукции пласта. То есть функция Леверетта равна объемной доле воды в суммарном потоке двух фаз;

е) коэффициент безводной нефтеотдачи определяют из соотношения:

$$\eta_{\text{бв}} = \frac{S_g - S_{\text{св}}}{1 - S_{\text{св}}} = \frac{1 - f(S_{\text{св}})}{f(S_g) - f(S_{\text{св}})}. \quad (10.13)$$

С увеличением  $\mu_o/\mu_w$  кривая  $f(S)$  сдвигается вправо, возрастает  $S_g$  и, соответственно, увеличивается  $\eta_{\text{бв}}$ . Иными словами, с увеличением вязкости воды и (или) с уменьшением вязкости нефти эффективность процесса вытеснения повышается. Этому способствует, например, применение пен и загустителей, повышающих  $\mu_o$ , или тепловых методов, уменьшающих  $\mu_w$ .

### 10.3. Модель вытеснения Рапопорта-Лиса (1953)

Отличительная черта модели Рапопорта-Лиса – учет капиллярного «скачка» давления  $P_k$ , которое задается в виде эмпирической функции насыщенности:

$$P_n - P_g = P_k(S) = \alpha_n \cos \theta \sqrt{\frac{m}{K}} J(S), \quad (10.14)$$

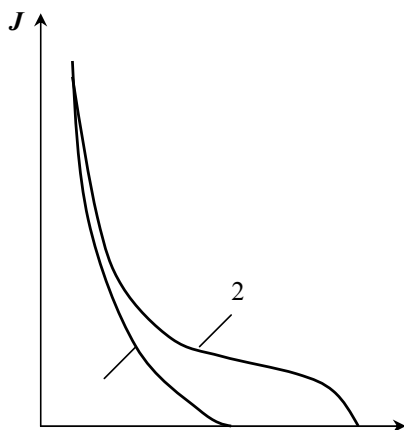
где  $\alpha_n$  – коэффициент межфазного поверхностного натяжения;  $\theta$  – статический краевой угол смачивания между жидкостью и породой;  $J(S)$  – безразмерная функция Леверетта.

Капиллярное давление выражает разность давлений в смачивающей и несмачивающей фазах и направлено в сторону несмачивающей фазы. В зависимости от характера смачиваемости пород капиллярное давление может способствовать вытеснению нефти из породы или препятствовать ему. Под действием капиллярного давления смачивающая фаза может самопроизвольно впитываться в пористую среду, вытесняя из нее несмачивающую фазу.

Так как смачивающая фаза обладает меньшей свободной поверхностной энергией, а мелкие поры – большей удельной поверхностью, то смачивающая фаза стремится занять мелкие поры, а несмачивающая – крупные.

Явление, при котором смачивающая жидкость внедряется в пористую среду исключительно под действием капиллярных сил, называется капиллярной пропиткой.

Капиллярные силы оказывают заметное влияние на процесс вытеснения только при малых размерах области фильтрации и низких скоростях движения жидкостей.



1 – кривая пропитки;  
2 – кривая вытеснения.

Изменение кривой Леверетта в разнонаправленных процессах носит *гистерезисный* характер.

Будем считать, что процесс однонаправленный. Тогда уравнения движения для двухфазной фильтрации запишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} V_n &= -\frac{KK_n(S)}{\mu_n} \left( \frac{\partial P_n}{\partial x} + \rho_n g \right), \\ V_g &= -\frac{KK_g(S)}{\mu_g} \left( \frac{\partial P_g}{\partial x} + \rho_g g \right) \end{aligned} \right\}. \quad (10.15)$$

$V_n + V_g = V(t)$ , откуда

$$V(t) = -K \left[ \frac{K_g(S)}{\mu_g} \frac{\partial P_g}{\partial x} + \frac{K_n(S)}{\mu_n} \frac{\partial P_n}{\partial x} \right] - K \left[ \frac{K_g(S)}{\mu_g} \rho_g + \frac{K_n(S)}{\mu_n} \rho_n \right] g. \quad (10.16)$$

Поскольку из уравнения (10.14) следует, что  $P_n = P_g + P_\kappa(S)$ , то, дифференцируя по  $x$ , имеем:

$$\frac{\partial P_n}{\partial x} = \frac{\partial P_g}{\partial x} + \frac{\partial P_\kappa(S)}{\partial x} = \frac{\partial P_g}{\partial x} + P_\kappa' \frac{\partial S}{\partial x},$$

причем

$$P_\kappa' = \frac{\partial P_\kappa}{\partial S}.$$

Подставим полученное выражение в формулу (10.16) и выразим  $\frac{\partial P_g}{\partial x}$ .

После преобразований получим:

$$\frac{\partial P_g}{\partial x} = - \frac{V(t) + \frac{KK_n(S)}{\mu_n} P_\kappa' \frac{\partial S}{\partial x} + \left( \frac{KK_g(S)}{\mu_g} \rho_g + \frac{KK_n(S)}{\mu_n} \rho_n \right) g}{\frac{KK_g(S)}{\mu_g} + \frac{KK_n(S)}{\mu_n}}.$$

Подставляя данное равенство во второе уравнение системы (10.15), имеем:

$$V_g = \left[ V(t) + \frac{KK_n(S)}{\mu_n} \left( P_\kappa'(S) \frac{\partial S}{\partial x} + \Delta \rho g \right) \right] f(S), \quad (10.17)$$

где  $\Delta \rho g = \rho_n - \rho_g$ ;  $f(S)$  – функция Бэкли-Леверетта.



Используя уравнение неразрывности (10.1) для водной фазы и выражение (10.17), окончательно получаем дифференциальное уравнение для определения насыщенности:

$$m \frac{\partial S}{\partial t} + V(t) \frac{\partial f(S)}{\partial x} + \frac{K}{\mu_n} \frac{\partial}{\partial x} \left[ K_n(S) \left( P_k' \frac{\partial S}{\partial x} + \Delta \rho g \right) f(S) \right] = 0. \quad (10.18)$$

Для удобства введем безразмерные независимые переменные:

$$\xi = \frac{x}{L} \quad \text{и} \quad \tau = \frac{Vt}{mL}.$$

С учетом выражения (10.14) для капиллярного давления уравнение насыщенности (10.18) примет вид:

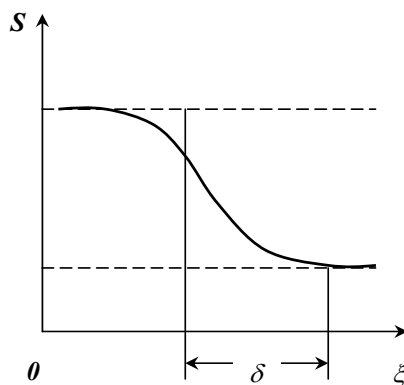
$$\frac{\partial S}{\partial \tau} + \frac{\partial f(S)}{\partial \xi} + A_g \frac{\partial}{\partial \xi} [K_n(S) f(S)] + A_k \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ K_n(S) f(S) J'(S) \frac{\partial S}{\partial \xi} \right] = 0, \quad (10.19)$$

$$\text{где } A_g = \frac{K \Delta \rho g}{\mu_n V} \quad \text{и} \quad A_k = \frac{\alpha_n \cos \theta \sqrt{mK}}{\mu_n V L}.$$

Безразмерные параметры  $A_g$  и  $A_k$  характеризуют соответственно отношение силы тяжести ( $A_g$ ) и капиллярных сил ( $A_k$ ) к силам вязкости.

Действие капиллярных сил проявляется в основном вблизи фронта вытеснения, где градиенты насыщенности велики. Эти силы приводят к «размазыванию» фронта вытеснения нефти водой, поэтому при учете капиллярных сил «скачок» насыщенности отсутствует, и насыщенность изменяется непрерывно.

Распределение насыщенности в стабилизированной зоне соответствует кривой (1) на графике  $S(x)$ , и, следовательно, не зависит от времени в системе координат  $\xi$ .

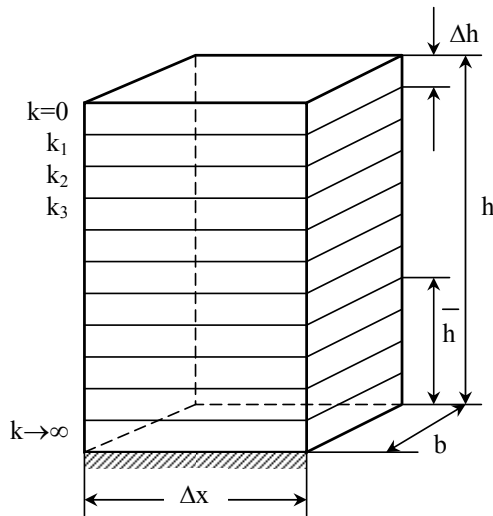


#### 10.4. Модифицированные относительные проницаемости

В слоисто-неоднородном пласте абсолютная проницаемость каждого прослоя может также изменяться по простиранию. Отдельные прослои могут замещаться в пространстве прослоями с иной проницаемостью, сливаться с

ними или полностью выклиниваться. Пласты такого типа больше похожи на однородные пласты, но их слоистая неоднородность ярко выражена.

Пласты описанного типа можно моделировать однородным пластом с осредненной абсолютной проницаемостью и модифицированными относительными проницаемостями для насыщающих флюидов.



Выделим элементарный объем прямолинейного пласта длиной  $\Delta x$ , общей толщиной  $h$  и шириной  $b$ , состоящий из набора пропластков с абсолютной проницаемостью, распределение которой подчиняется определенному вероятностно-статистическому закону (лог-нормальному, гамма-распределению, распределениям Максвелла, Саттарова и т.п.).

Расположим слои таким образом, чтобы слой с самой высокой абсолютной проницаемостью находился в нижней части элемента, а слой с наименьшей проницаемостью – в верхней.

Так как  $\Delta x$  мало, можно считать, что вода последовательно и мгновенно заполняет каждый пропласток, начиная с нижнего.

Таким образом, в какой-то момент времени оказывается, что из слоев суммарной толщиной  $\bar{h}$  произошло вытеснение нефти, и в них фильтруется только вода. В этих слоях, в соответствии с моделью поршневого вытеснения, осталась неизвлекаемая нефть с остаточной нефтенасыщенностью  $S_{ност}$ . В остальных слоях содержатся нефть и связанная вода.

Расход воды  $\Delta q_{\text{в}}$ , поступающей в слой толщиной  $\Delta h$ , определяется по закону Дарси:

$$\Delta q_{\text{в}} = \frac{K(1 - S_{\text{ност}} - S_{\text{св}})}{\mu_{\text{в}}} \frac{\Delta P}{\Delta x} b \Delta h.$$

Если бы слой содержал только воду, то:

$$\Delta \bar{q}_{\text{в}} = \frac{K}{\mu_{\text{в}}} \frac{\Delta P}{\Delta x} b \Delta h.$$

Полный расход воды, поступившей во все обводнившиеся слои толщиной  $\bar{h}$ , составит:

$$q_{\text{в}} = \frac{b}{\mu_{\text{в}}} \frac{\Delta P}{\Delta x} \int_0^{\bar{h}} K(1 - S_{\text{ност}} - S_{\text{св}}) dh.$$

Если бы весь пласт был насыщен водой, то:

$$\bar{q}_e = \frac{b}{\mu_e} \frac{\Delta P}{\Delta x} \int_0^h K dh.$$

Обозначим модифицированную относительную проницаемость для воды  $\bar{K}_e$  и определим ее как отношение текущего расхода воды через элемент пласта с учетом остаточной нефти к общему расходу воды через элемент при условии полного насыщения водой:

$$\bar{K}_e = \frac{q_e}{\bar{q}_e} = \frac{\int_0^{\bar{h}} K(1 - S_{ност} - S_{св}) dh}{\int_0^h K dh}.$$

Учитывая вероятностно-статистическое распределение абсолютной проницаемости, т.е. полагая

$$dh = h \cdot f(K) dK,$$

из предыдущих формул имеем:

$$\bar{K}_e = \frac{\int_0^\infty (1 - S_{ност} - S_{св}) K \cdot f(K) dK}{\int_0^\infty K \cdot f(K) dK},$$

где  $f(K)$  – функция (плотность) распределения проницаемости;  $K^*$  – проницаемость обводнившегося в данный момент слоя.

Аналогичным образом получим выражение модифицированной относительной проницаемости для нефти:

$$\bar{K}_n = \frac{\int_0^{K^*} K \cdot f(K) dK}{\int_0^\infty K \cdot f(K) dK}.$$

Модифицированные проницаемости для нефти и воды зависят от модифицированной водонасыщенности  $\bar{S}$ . Выведем выражение для определения  $\bar{S}$ .

Поровый объем  $\Delta V_n$  элемента составляет:

$$\Delta V_n = mbh \cdot \Delta x.$$

Объем связанной воды в обводнившихся слоях:

$$\Delta V_{св} = mb\Delta x \int_{\bar{h}}^h S_{св} dh = mb\Delta x h \int_0^{K^*} S_{св} \cdot f(K) dK.$$

Объем воды в обводнившихся слоях:

$$\Delta V_{\text{г}} = mb\Delta xh \int_{K^*}^{\infty} (1 - S_{\text{норм}}) \cdot f(K) dK.$$

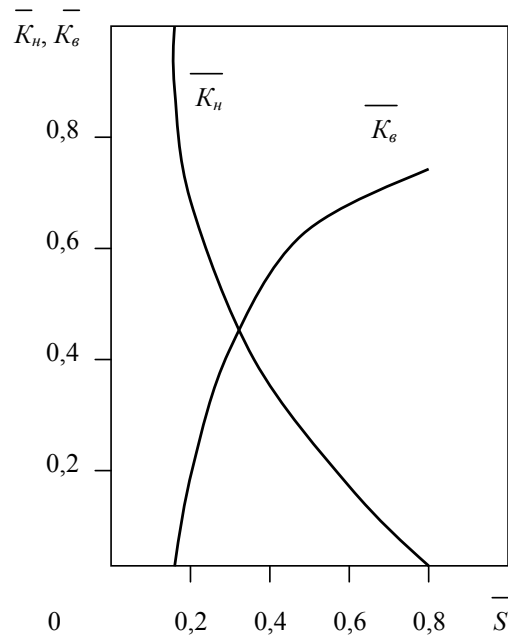
Полный объем воды в элементе пласта:

$$\Delta \bar{V}_{\text{г}} = \Delta V_{\text{г}} + \Delta V_{\text{св}} = mb\Delta xh \left[ \int_0^{\infty} S_{\text{св}} \cdot f(K) dK + \int_{K^*}^{\infty} (1 - S_{\text{норм}} - S_{\text{св}}) f(K) dK \right].$$

Модифицированная водонасыщенность составит:

$$\bar{S} = \frac{\Delta \bar{V}_{\text{г}}}{\Delta V_{\text{н}}} = \int_0^{\infty} S_{\text{св}} \cdot f(K) dK + \int_{K^*}^{\infty} (1 - S_{\text{норм}} - S_{\text{св}}) \cdot f(K) dK.$$

Зависимости модифицированных относительных проницаемостей от модифицированной водонасыщенности показаны на рисунке.



### **Контрольные вопросы:**

1. Опишите механизм непереносимого вытеснения нефти водой.
2. Приведите формулу закона Дарси для случая совместной фильтрации двух несмешивающихся жидкостей.
3. Выведите уравнение для определения насыщенности без учета капиллярных эффектов.
4. Нарисуйте и проанализируйте кривые относительных фазовых проницаемостей для нефти и воды (кривые Бэкли-Леверетта).
5. В чем заключается физический смысл функции Леверетта? Приведите выражение и постройте график функции Леверетта.
6. Объясните причины появления «скачка» насыщенности в модели Бэкли-Леверетта.
7. Как влияет на эффективность процесса вытеснения соотношение вязкостей нефти и воды (вытесняемой и вытесняющей фаз)?
8. Приведите последовательность определения показателей разработки месторождения с использованием модели непереносимого вытеснения нефти водой.
9. В чем заключается явление капиллярной пропитки? Охарактеризуйте модель вытеснения Рапопорта-Лиса.
10. В какой последовательности рассчитываются модифицированные относительные проницаемости?
11. Выведите выражение для модифицированной водонасыщенности. Постройте график зависимости модифицированных относительных проницаемостей от модифицированной водонасыщенности.

## **11. УСТАНОВИВШАЯСЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ГАЗИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ**

При снижении пластового давления ниже давления насыщения из нефти начинает выделяться газ. В этом случае имеет место фильтрация газированной жидкости, которая представляет собой двухфазную систему – смесь нефти и выделившегося из нее свободного газа.

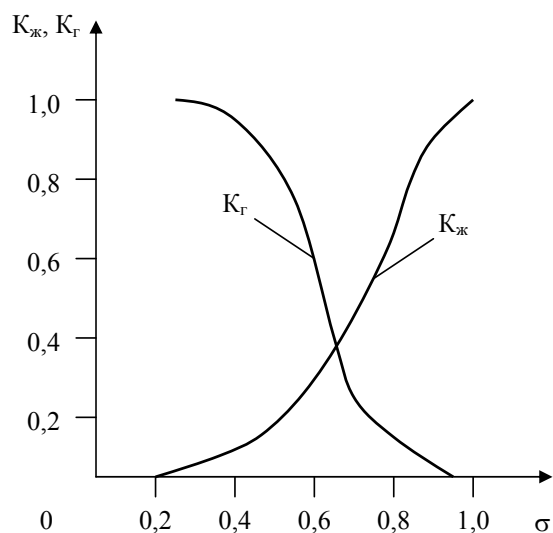
Рассмотрим установившееся прямолинейно-параллельное движение газированной жидкости в пористой среде, для которого справедлив закон Дарси. Запишем этот закон отдельно для каждой фазы, вводя коэффициенты фазовых проницаемостей  $KK_{жс}$  и  $KK_z$ , которые меняются в пласте от точки к точке:

$$\begin{aligned} Q_{жс} &= -\frac{KK_{жс}}{\mu_{жс}} \frac{dP}{dx} f, \\ Q'_z &= -\frac{KK_z}{\mu_z} \frac{dP}{dx} f, \end{aligned} \quad (11.1)$$

где  $Q'_z$  - объемный расход свободного газа в сечении площадью  $f$  при давлении  $P$ .

Опытами Викоффа и Ботсета было установлено, что фазовые проницаемости для жидкости и газа зависят главным образом от насыщенности порового пространства жидкой фазой  $\sigma$ .

Построены графики зависимостей относительных проницаемостей  $K_{жс}$  и  $K_z$  от насыщенности  $\sigma$  для различных типов коллекторов:



Из построений следует: увеличение количества свободного газа (уменьшение  $\sigma$ ) сопровождается резким уменьшением относительной проницаемости для жидкости. Как следствие, происходит падение дебита жидкости  $Q_{жс}$ .

Поэтому на практике стараются не допускать чрезмерного выделения газа в пласте и на забоях скважин, применяя методы искусственного поддержания пластового давления (например, нагнетание рабочих агентов).

В теории фильтрации газированной жидкости вводятся понятия газового фактора и функции Христиановича.

### 11.1. Газовый фактор

Объемный дебит жидкости  $Q_{жс}$  содержит объем *растворенного газа*, который можно выразить уравнением:

$$(Q_z)_{\text{раств}} = SPQ_{жс}, \quad (11.2)$$

где  $S$  – коэффициент растворимости газа в жидкости,  $[м^3/(м^3 \cdot Па)]$ .

Подставляя в формулу (11.2) значение  $Q_{жс}$  из уравнений (11.1), получаем:

$$(Q_z)_{\text{раств}} = -SP \frac{KK_{жс}}{\mu_{жс}} \frac{dP}{dx} f. \quad (11.3)$$

Объемный дебит *свободного газа*, приведенный к атмосферному давлению, находят из выражения:

$$(Q'_z)_{\text{ат}} = Q'_z \frac{P}{P_{\text{ат}}} = -\frac{P}{P_{\text{ат}}} \frac{KK_z}{\mu_z} \frac{dP}{dx} f. \quad (11.4)$$

Полное объемное количество газа  $(Q_z)_{am}$ , которое будет выделяться в единицу времени на устье скважины при снижении давления до атмосферного, равно сумме выражений (11.3) и (11.4):

$$(Q_z)_{am} = (Q_z)_{раств} + (Q'_z)_{ам} = -\frac{dP}{dx} f \frac{P}{P_{ам}} \left( SP_{ам} \frac{KK_{жс}}{\mu_{жс}} + \frac{KK_z}{\mu_z} \right).$$

Под газовым фактором подразумевается отношение приведенного к атмосферному давлению дебита газа к дебиту жидкости:

$$\Gamma = \frac{(Q_z)_{ам}}{Q_{жс}} = \frac{P}{P_{ам}} \left( SP_{ам} + \frac{K_z}{K_{жс}} \frac{\mu_{жс}}{\mu_z} \right). \quad (11.5)$$

Или можно записать:

$$\Gamma = \frac{P}{P_{ам}} \frac{\mu_{жс}}{\mu_z} \left( \frac{K_z}{K_{жс}} + \frac{P_{ам} S \mu_z}{\mu_{жс}} \right). \quad (11.5')$$

Первое слагаемое в скобках  $\frac{K_z}{K_{жс}}$  является функцией насыщенности  $\sigma$ .

$$\frac{K_z}{K_{жс}} = \psi(\sigma).$$

Второе слагаемое безразмерно и зависит от постоянных величин:

$$P_{ам} S \frac{\mu_z}{\mu_{жс}} = \alpha.$$

Следовательно, выражение для газового фактора (11.5') можно записать иначе:

$$\frac{\mu_z}{\mu_{жс}} \Gamma = \frac{P}{P_{ам}} [\psi(\sigma) + \alpha]. \quad (11.6)$$

Данная формула устанавливает связь между давлением и насыщенностью следующим образом.

При установившейся фильтрации газовый фактор всюду в пласте одинаков. Введем обозначение:

$$\frac{\mu_z}{\mu_{жс}} \Gamma = \xi.$$

$\xi = const$  при  $\Gamma = const$ . Тогда из формулы (11.6) следует:

$$\frac{P}{P_{ам}} = \frac{\xi}{\psi(\sigma) + \alpha}.$$

Снова введем обозначение:

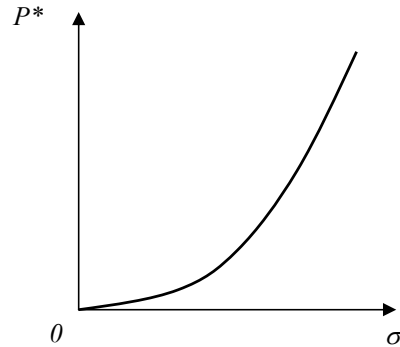
$$\frac{P}{\xi P_{at}} = P^*.$$

Видно, что

$$P^* = \frac{1}{\psi(\sigma) + \alpha} = P^*(\sigma). \quad (11.7)$$

Величина  $P^*$  называется безразмерным давлением и является функцией насыщенности.

Поскольку  $\psi(\sigma) = \frac{K_{\varepsilon}}{K_{\text{жс}}}$ , легко построить график зависимости  $P^*(\sigma)$  по исходным кривым относительных фазовых проницаемостей.

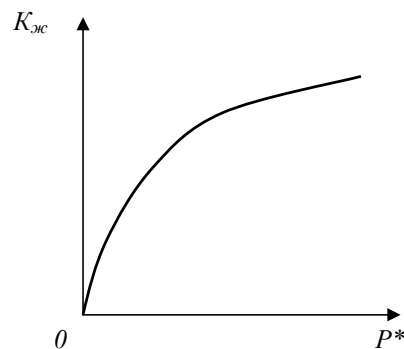


## 11.2. Функция Христиановича

Вернемся к формуле  $Q_{\text{жс}} = -\frac{KK_{\text{жс}}}{\mu_{\text{жс}}} \frac{dP}{dx} f$ .

Здесь  $K_{\text{жс}}(\sigma)$  – известная функция насыщенности. Кроме того, как было показано выше, давление  $P$  – также однозначная функция насыщенности.

Таким образом, насыщенность  $\sigma$  является параметром, связывающим зависимости  $K_{\text{жс}}(\sigma)$  и  $P(\sigma)$ . Пользуясь графиками  $K_{\text{жс}}(\sigma)$ ,  $K_{\varepsilon}(\sigma)$  и выражением (11.7), легко построить зависимость  $K_{\text{жс}}(P^*)$ , т.е. связать относительную проницаемость с давлением.





Зная зависимость  $K_{ж}(P^*)$ , введем функцию, полный дифференциал которой равен:

$$dH = K_{ж} dP.$$

Тогда первое уравнение (11.1) можно записать в виде:

$$Q_{ж} = -\frac{K}{\mu_{ж}} \frac{dH}{dx} f.$$

Функция  $H$  имеет размерность давления и называется функцией С.А.Христиановича.

Для установившегося движения газированной жидкости справедливы все формулы, выведенные для однородной несжимаемой жидкости, если в них заменить давление  $P$  на функцию Христиановича  $H$ :

$$H = \int K_{ж} dP + C.$$

При этом плотность и вязкость жидкой фазы считаются постоянными.

Например, дебит жидкой фазы газированной жидкости для скважины, расположенной в центре горизонтального пласта с бесконечно удаленным контуром питания, определяется согласно формуле Дюпюи:

$$Q_{ж} = \frac{2\pi K h (H_{к} - H_{с})}{\mu_{ж} \ln \frac{R_{к}}{R_{с}}}.$$

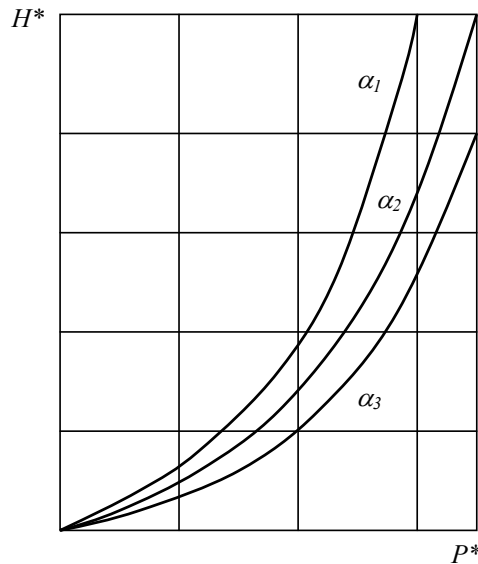
### 11.3. Алгоритм нахождения функции Христиановича по методу Б.Б.Лапука

В основе метода лежит график зависимости  $H^*(P^*)$ , где  $H^*$  - безразмерная функция Христиановича,  $P^*$  - безразмерное давление.

$$P^* = \frac{P}{\xi P_{ат}}.$$

$$H^* = \int_0^{P^*} K_{ж} dP^*.$$

Используя график  $K_{ж}(P^*)$ , строят зависимость  $H^*(P^*)$ :



Зная давление  $P$ , функцию Христиановича находят следующим образом:

- 1) определяют величину  $\xi$

$$\xi = \frac{\mu_c}{\mu_{жс}} \Gamma ;$$

- 2) переходят от давления  $P$  к безразмерному давлению  $P^*$

$$P^* = \frac{P}{\xi P_{ат}} ;$$

- 3) находят

$$\alpha = P_{ат} S \frac{\mu_c}{\mu_{жс}} ;$$

- 4) зная  $\alpha$ , по одной из кривых графика  $H^*(P^*)$  находят величину  $H^*$ , соответствующую расчетному значению  $P^*$ ;

- 5) переходят к размерной функции Христиановича

$$H = H^* \xi P_{ат} .$$

#### 11.4. Упрощенные способы определения функции Христиановича

##### 1. Способ И.А.Чарного, М.М.Глоговского, М.Д.Розенберга

В широком диапазоне значений зависимость  $H^*(P^*)$  имеет вид почти прямой линии. Тогда можно записать:

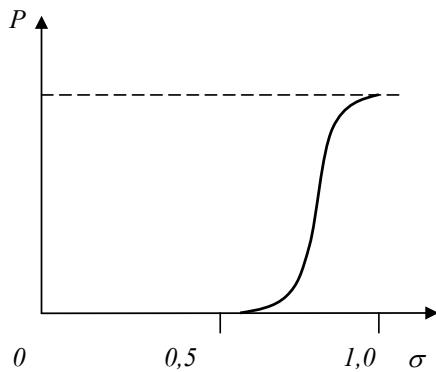
$$H_{\kappa} - H_c = A(P_{\kappa} - P_c),$$

где  $A \approx 0,944 - 21,43\alpha$  при условии, что  $0,2 \leq \frac{P_c}{P_{\kappa}} \leq 1$ .

## II. Способ Г.Б.Пыхачева

$$H_k - H_c = \tilde{K}_{ж} (P_k - P_c),$$

где  $\tilde{K}_{ж}$  - относительная проницаемость для жидкой фазы, соответствующая средневзвешенному пластовому давлению.



Задачи неустановившейся фильтрации газированной жидкости решаются численными методами с использованием ЭВМ. К.А.Царевич и В.А.Архангельский, решая задачу об истощении залежи, разрабатываемой на режиме растворенного газа, получили следующий результат:

когда давление падает до нуля, насыщенность остается выше 60-70%.

Это означает, что за счет энергии растворенного газа из пласта может быть извлечено не более 30% нефти.

### Контрольные вопросы:

55. Напишите формулу закона фильтрации Дарси для случая совместного движения жидкости и газа.
56. Охарактеризуйте режим растворенного газа.
57. Проанализируйте кривые относительных фазовых проницаемостей для жидкости и газа (кривые Викоффа-Ботсета).
58. Дайте определение газового фактора.
59. Как связаны с насыщенностью газовый фактор, давление и дебит жидкой фазы?
60. Что такое функция Христиановича? Для чего она используется?
61. В какой последовательности определяется функция Христиановича по методу Б.Б.Лапука?
62. Приведите способы упрощенного определения функции Христиановича.

## 12. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ УВЕЛИЧЕНИЯ НЕФТЕОТДАЧИ ПЛАСТОВ

### 12.1. Механизм химических методов увеличения нефтеотдачи (МУН)

При вытеснении нефти водой значительная часть нефти в пласте остается неизвлеченной. Основные причины неполного вытеснения нефти водой заключаются в следующем:

- 1) несмешиваемость вытесняющей и вытесняемой жидкостей приводит к образованию поверхности раздела, на которой действуют капиллярные силы, препятствующие вытеснению нефти;
- 2) часть нефти адсорбируется на поверхности зерен породы в виде слоя тяжелых компонентов в результате гидрофобизации пород-коллекторов;
- 3) различие вязкостей нефти и воды приводит к тому, что более подвижная, как правило, вода стремится прорваться через нефть к добывающим скважинам;
- 4) вследствие неоднородности пласта вытеснение происходит преимущественно из высокопроницаемых зон.

В настоящее время разрабатываются и широко внедряются в практику химические методы увеличения нефтеотдачи, суть которых состоит в том, что нефть вытесняется из пластов:

а) растворами различных **активных примесей** (полимеры, поверхностно-активные вещества (ПАВ), уголекислота, минеральные соли, спирты, мицеллярные растворы и т.д.);

б) **растворителями** (сжиженный пропан, газовый конденсат и пр.), которые в виде пробок, или оторочек, продвигаются по пласту водой или сухим газом.

Механизм вытеснения нефти растворами активных примесей состоит в изменении вязкостей фаз, фазовых проницаемостей, капиллярного скачка между фазами. Например, при добавке полимеров в закачиваемую воду происходит увеличение ее вязкости. При вытеснении нефти карбонизированной водой (водным раствором  $\text{CO}_2$ ) уменьшается поверхностное натяжение на границе раздела фаз, снижается вязкость нефти, увеличивается вязкость водного раствора. При добавлении ПАВ в нагнетаемую воду происходит снижение поверхностного натяжения на границе раздела с нефтью, и т.д.

Относительные проницаемости и вязкости фаз зависят от концентрации  $C$  химического реагента (активной примеси) в водном растворе:

$$K_e = K_e(S; C); \quad \mu_e = \mu_e(C);$$

$$K_n = K_n(S; C); \quad \mu_n = \mu_n(C).$$

Сущность действия растворителей заключается в том, что нефть вытесняется из пласта смешивающейся с ней жидкостью. В результате молекулярной диффузии вещество-растворитель проникает в нефть, а

углеводороды нефти – в растворитель, и с течением времени нефть практически полностью может быть вымыта из пласта.

Процессы вытеснения нефти растворителями требуют учета межфазной диффузии, но, несмотря на это, они также описываются в рамках математической модели, близкой к модели вытеснения нефти раствором активной примеси.

## 12.2. Дифференциальные уравнения двухфазной фильтрации в присутствии активной примеси

Активная примесь с концентрацией  $C$  в водном растворе может растворяться в нефти и одновременно адсорбироваться на поверхности породы.

Пусть  $\varphi(C)$  – концентрация примеси в нефти,  $a(C)$  – количество примеси, адсорбированное пористой средой.

Будем считать, что параметры  $\varphi$  и  $a$  пропорциональны концентрации  $C$ :

$$a = \Gamma C; \quad \varphi = KC,$$

где  $\Gamma$  и  $K$  – коэффициенты пропорциональности.

Предположим также, что водный раствор активной примеси и нефть – несжимаемые жидкости, а их движение – прямолинейно-параллельное.

Выведем уравнение фильтрации, используя дифференциальные уравнения неразрывности, уравнения движения и баланса массы примеси.

Уравнения неразрывности для воды и нефти:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial V_{\text{в}}}{\partial x} &= 0, \\ -m \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial V_{\text{н}}}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.1)$$

Уравнения движения:

$$\left. \begin{aligned} V_{\text{в}} &= -\frac{KK_{\text{в}}(S, C)}{\mu_{\text{в}}(C)} \frac{\partial P}{\partial x}; \\ V_{\text{н}} &= -\frac{KK_{\text{н}}(S, C)}{\mu_{\text{н}}(C)} \frac{\partial P}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (12.2)$$

Уравнение баланса массы примеси:

$$m \frac{\partial}{\partial t} [CS + \varphi(1 - S) + a] + \frac{\partial}{\partial x} [CV_{\text{в}} + \varphi V_{\text{н}}] = 0, \quad (12.3)$$

где:

$m[CS + \varphi(1 - S) + a]$  – количество примеси в единице объема пористой среды;

$[CV_{\text{в}} + \varphi V_{\text{н}}]$  - скорость переноса массы примеси в общем потоке жидкости (плотность потока примеси).

Суммарная скорость фильтрации зависит только от времени:

$$V = V_{\text{н}} + V_{\text{в}} = V(t).$$

Из системы уравнений (12.2) получим:

$$V(t) = -K \left( \frac{K_{\text{в}}}{\mu_{\text{в}}} + \frac{K_{\text{н}}}{\mu_{\text{н}}} \right) \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (12.4)$$

откуда

$$\frac{\partial P}{\partial x} = - \frac{V}{K \left( \frac{K_{\text{в}}}{\mu_{\text{в}}} + \frac{K_{\text{н}}}{\mu_{\text{н}}} \right)}.$$

Подставляя данное выражение в формулу (12.2) для водной фазы, получим:

$$V_{\text{в}} = fV, \quad (12.5)$$

где  $f = f(S, C) = \frac{K_{\text{в}}}{K_{\text{в}} + \frac{\mu_{\text{в}}}{\mu_{\text{н}}} K_{\text{н}}}$  - функция Бэкли-Левретта.

Для нефтяной фазы:

$$V_{\text{н}} = (1 - f)V. \quad (12.6)$$

Как и при вытеснении нефти водой, функция  $f$  равна доле воды в потоке. Однако при вытеснении нефти раствором активной примеси  $f$  зависит не только от насыщенности, но и от концентрации примеси  $C$ .

С учетом выражения (12.5) имеем следующую систему дифференциальных уравнений для определения водонасыщенности  $S$  и концентрации активной примеси  $C$ :

$$\begin{cases} m \frac{\partial S}{\partial t} + V \frac{\partial f}{\partial x} = 0; \\ m \frac{\partial}{\partial t} [SC + KC(1 - S) + \Gamma C] + V \frac{\partial}{\partial x} [Cf + KC(1 - f)] = 0. \end{cases} \quad (12.7)$$

Введем безразмерные переменные:

$$\xi = \frac{x}{l} \text{ и } \tau = \frac{Vt}{mL}.$$

Тогда систему уравнений (12.7) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial \xi} = 0; \\ \frac{\partial}{\partial \tau} [C(S+b)] + \frac{\partial}{\partial \xi} [C(f+h)] = 0. \end{cases} \quad (12.8)$$

где  $h = K(1-K)^{-1}$ ;  $b = (K + \Gamma)(1-K)^{-1}$ .

### 12.3. Движение скачков насыщенности и концентрации

Зададим начальные и граничные условия в виде:

в начальный момент времени -  $S(\xi, 0) = S_0$ ;  $C(\xi, 0) = 0$ ;

на входе в элемент -  $S(0, \tau) = S^0$ ;  $C(0, \tau) = C^0$ .

При малой концентрации активной примеси  $C$ , когда  $\varphi(C) = KC$  и  $a(C) = \Gamma C$ , распределение концентрации  $C$  имеет вид «ступеньки», как показано на рис. 12.1, 12.2. Тогда система уравнений (12.8) упрощается и принимает вид:

для зоны I, когда  $0 \leq \xi \leq \xi_c(\tau)$ ,

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} + \frac{\partial f(S, C^0)}{\partial \xi} = 0;$$

для зоны II, когда  $\xi_c(\tau) < \xi < l$ ,

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} + \frac{\partial f(S, 0)}{\partial \xi} = 0.$$

Резкое изменение концентрации на границе зон I и II («скачок» концентрации) обуславливает резкое уменьшение насыщенности («скачок» насыщенности).

На рис.12.1 показано распределение насыщенности порового пространства водной фазой в случае *слабой адсорбции* активной примеси. Знаками «-» и «+» обозначены значения водонасыщенности соответственно перед скачком и после него.

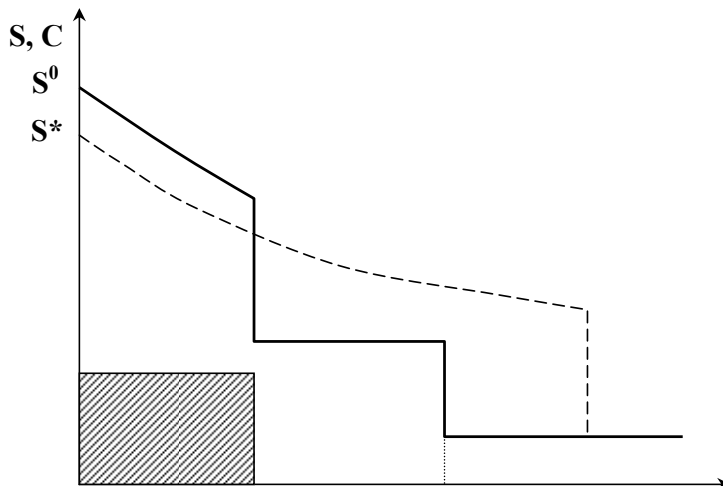


Рис. 12.1. Распределение водонасыщенности при слабой адсорбции активной примеси

----- - обычное заводнение

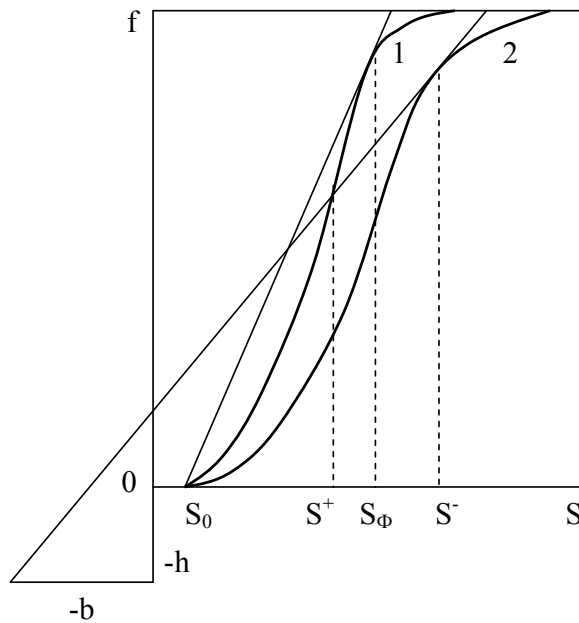
Для определения  $V_c$  (скорости движения жидкости с концентрацией примеси  $C$ ),  $S^-$  и  $S^+$  используют уравнения:

$$\left. \begin{aligned} f'(S^-; C^0) &= \frac{f(S^-; C^0) + h}{S^- + b}; \\ V_c &= f'(S^-; C^0); \\ \frac{f(S^-; C^0) - f(S^+; 0)}{S^- + S^+} &= V_c. \end{aligned} \right\} \quad (12.9)$$

Из первого уравнения определяют  $S^-$ , из второго  $V_c$ , из третьего  $S^+$ .

Уравнения (12.9) проще решать графоаналитическим способом. Для этого в координатах  $f(S)$  строят функции  $f(S; C^0)$  и  $f(S, 0)$ .





- 1 -  $f(S, 0)$ : вытеснение обычной водой,  $C=0$ ;  
 2 -  $f(S; C^0)$ : вытеснение раствором активной примеси,  $C=C^0$ .

Из точки с координатами  $(-b; -h)$  проводят касательную к кривой 2. На абсциссе в точке касания получают значение  $S^-$ , а в точке пересечения касательной с кривой 1 – значение  $S^+$ . По тангенсу угла наклона касательной к оси абсцисс определяют  $V_c$ .

Проводят касательную к кривой 1 из точки с координатами  $(S_0, 0)$ , и на оси абсцисс находят соответствующее ей значение  $S_\phi$ . Полученное значение  $S_\phi$  сравнивают с  $S^+$ .

Если  $S^+ > S_\phi$ , имеет место сильная адсорбция примеси пористой средой.

Если  $S^+ \leq S_\phi$ , имеет место слабая адсорбция примеси (см. рис. 12.1).

На рис.12.2 показано распределение насыщенности порового пространства водной фазой в случае **сильной адсорбции** активной примеси.

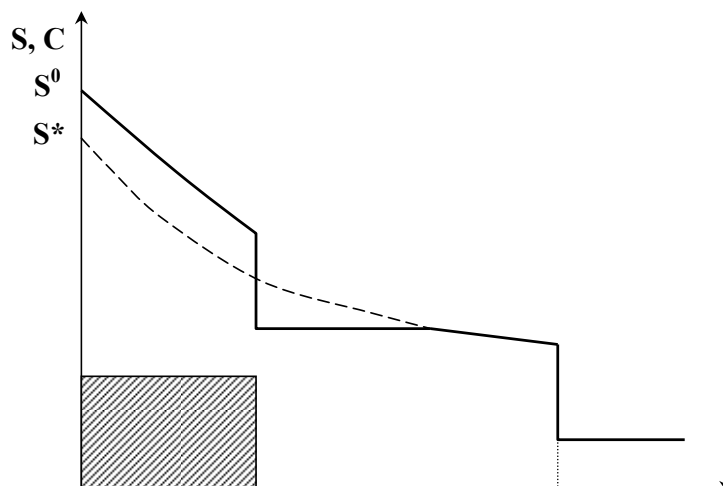


Рис. 12.2. Распределение водонасыщенности при сильной адсорбции  
- обычное заводнение

#### 12.4. Анализ построений

В обоих случаях при сильной и слабой адсорбции на графиках распределения водонасыщенности выделяются три зоны:

**А** – зона невозмущенного течения перед фронтом вытеснения, в ней  $S=S_0$ ;  $C=0$ ;

**Б** – водонефтяной вал, в котором примесь отсутствует и  $C=0$ . При слабой адсорбции в зоне **Б**  $S=S^+$ , при сильной адсорбции – изменяется от  $S^+$  до  $S_\phi$ .

**В** – зона течения водонефтяной смеси в присутствии активной примеси. Здесь  $C=C^0$ , а насыщенность монотонно возрастает от  $S^-$  за фронтом концентрации до  $S^0$  на нагнетательной галерее.

В обоих случаях отмечается отставание фронта активной примеси от фронта вытеснения, чем объясняется наличие зоны **Б**.

Однако сильно сорбирующаяся примесь не изменяет момента начала обводнения добываемой продукции. Прирост нефтеотдачи получают лишь на поздней стадии разработки, к моменту подхода фронта концентрации к зоне отбора ( $S^0 > S^*$ ).

При закачке слабо сорбирующейся примеси происходит отставание фронта вытеснения нефти рабочим агентом по сравнению с обычным заводнением ( $S^+ < S_\phi$ ). Это приводит к увеличению безводного периода эксплуатации и снижению обводненности добываемой продукции на начальной стадии водного периода. Нефтеотдача увеличивается уже на ранней стадии добычи нефти.

Соотношение коэффициентов безводной нефтеотдачи выглядит следующим образом:

$$\frac{S^- - S_0}{1 - S_0} > \frac{S_\phi - S_0}{1 - S_0}.$$

Аналогичное гидродинамическое описание применимо к процессам вытеснения нефти растворителями. Если оторочка растворителя продвигается в пласт водой, то образуется область совместной фильтрации растворителя и воды как двух несмешивающихся жидкостей, а также область смешения нефти и растворителя. Процесс образования и роста области смешения обуславливается молекулярной и конвективной диффузией.

Концентрацию растворителя в нефти, а также размеры области смешения можно определить, решая методом интегральных соотношений уравнение:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial C}{\partial x} \right) - \frac{V}{m} \frac{\partial C}{\partial x},$$

где  $D$  — коэффициент диффузии, одновременно учитывающий различие вязкостей вытесняющей и вытесняемой смешивающихся жидкостей.

### **Контрольные вопросы:**

63. Назовите основные причины неполного вытеснения нефти из пласта водой.
64. Охарактеризуйте механизм химических методов увеличения нефтеотдачи пластов.
65. Поясните физический смысл уравнения баланса массы активной примеси.
66. Выведите систему дифференциальных уравнений для определения водонасыщенности и концентрации активной примеси.
67. Поясните особенности движения скачков насыщенности и концентрации активной примеси для случаев слабой и сильной адсорбции.
68. Как определить графическим способом значения водонасыщенности, соответствующие скачку концентрации активной примеси.
69. Как влияет интенсивность адсорбции на показатели разработки пласта?

### 13. ОСНОВЫ ТЕОРИИ СОВМЕСТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ НЕФТИ, ВОДЫ И ГАЗА

Если нефть находится в пласте в смеси со свободной водой, то при снижении давления ниже давления насыщения из раствора начинает выделяться газ, и в пласте образуется трехфазная система нефть-газ-вода. Теорию движения трехфазной смеси можно представить как обобщение теории Бэкли-Левретта.

#### 13.1. Обобщенный закон Дарси для трехфазной фильтрации

Рассмотрим случай одномерного движения смеси взаимно нерастворимых и химически не реагирующих несжимаемых жидкостей, причем капиллярностью и массовыми силами пренебрегаем.

Обобщенный закон Дарси запишется в виде:

$$V_i = -\frac{K}{\mu_i} K_i(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \frac{\partial P}{\partial x}, i=1,2,3. \quad (13.1)$$

Насыщенности фаз  $\sigma_i$  удовлетворяют равенству:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 1.$$

Если в пористой среде находится трехфазная система, состоящая из воды, нефти и газа, то проницаемость пористой среды необходимо характеризовать тремя фазовыми проницаемостями – для воды, нефти и газа. Их величина, также как и при двухфазном течении, зависит от насыщенности пористой среды фазами, структуры порового пространства, физико-химических свойств фаз, самой пористой среды, условий фильтрации.

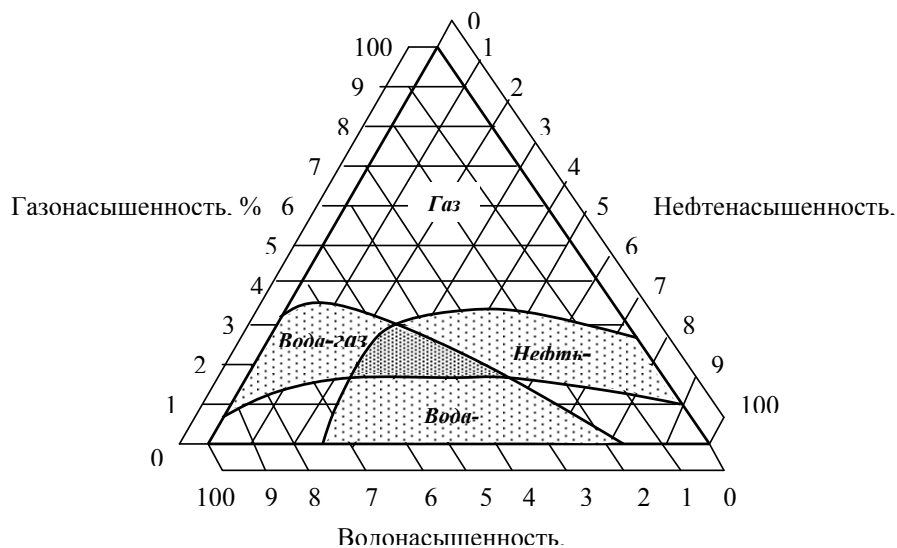


Рис. 13.1. Треугольная диаграмма трехфазного потока в пористой среде

На рис. 13.1 показаны области насыщенностей, при которых возможны одно-, двух- и трехфазные потоки в пористой среде.

Вершины треугольной диаграммы соответствуют 100%-ному насыщению пористой среды одной из фаз.

Противоположные эти вершинам стороны соответствуют отсутствию данной фазы в породе.

В каждой точке внутри треугольной диаграммы сумма насыщенностей равна единице.

Кривые линии отделяют на диаграмме возможные области одно-, двух- или трехфазного течения.

Как видно из рисунка, при содержании в породе более 35% газа движущейся фазой является только газ, а вода и нефть, занимающие оставшийся объем пор, неподвижны.

При содержании газа меньше 10% и нефти меньше 23% поток содержит одну воду, а при насыщенности водой от 20 до 30% и газом от 10 до 18% в движении участвует только нефть.

Затененные области, примыкающие к той или иной стороне треугольной диаграммы, отвечают одновременному движению двух фаз: газ-вода, вода-нефть и газ-нефть. В центре диаграммы расположена область насыщенностей, при которых в потоке одновременно движутся три фазы.

Если обозначить фазы соответственно  $n$ ,  $г$  и  $в$ , то относительные проницаемости можно определить с помощью треугольных диаграмм, показанных на рис. 13.2.

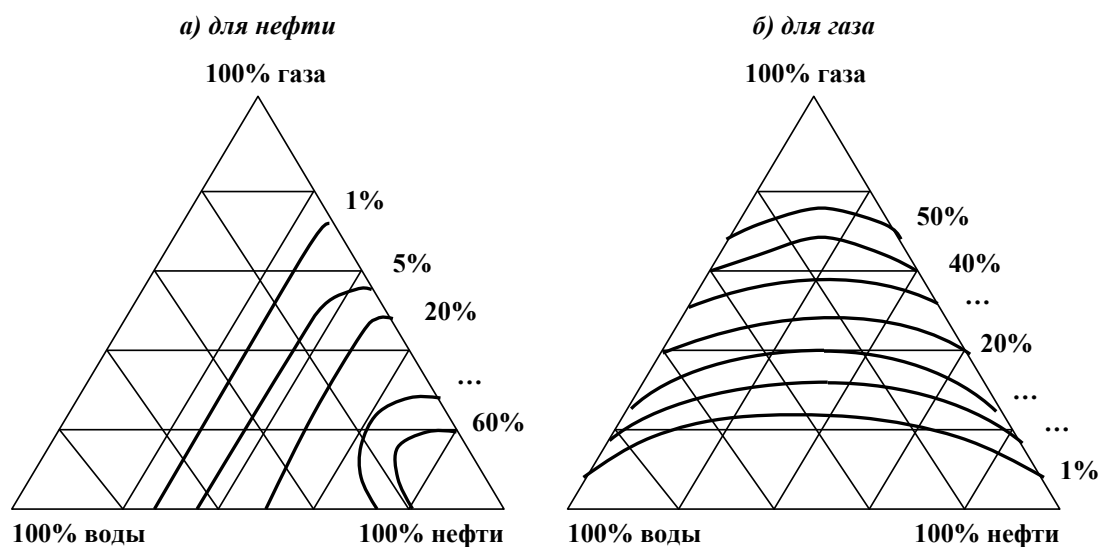


Рис. 13.2. Треугольные диаграммы относительных проницаемостей

При этом следует иметь ввиду, что фазовые проницаемости являются уже функциями двух независимых насыщенностей  $\sigma_n$  и  $\sigma_g$  (газонасыщенность  $\sigma_g = 1 - \sigma_n - \sigma_o$ ):

$$\begin{aligned}K_n &= K_n(\sigma_n, \sigma_g); \\K_g &= K_g(\sigma_n, \sigma_g); \\K_o &= K_o(\sigma_n, \sigma_g).\end{aligned}$$

Принцип построения диаграмм следующий.

Параллельно каждой стороне равностороннего треугольника проводятся прямые, вдоль которых насыщенность одной из фаз постоянна. Каждая насыщенность изменяется от нуля вдоль стороны треугольника до 100% на противоположной вершине. Каждая точка внутри треугольника, находящаяся на пересечении двух прямых, параллельных двум сторонам, соответствует определенным значениям  $\sigma_n$ ,  $\sigma_g$  и  $\sigma_o$ .

На треугольники наносятся линии одинаковых относительных проницаемостей фаз. Характер зависимостей определяется различной степенью смачивания твердых зерен породы фазами, причем относительная проницаемость наиболее смачивающей фазы – воды – практически зависит только от водонасыщенности  $\sigma_w$  и почти не зависит от нефте- и газонасыщенности  $\sigma_n$  и  $\sigma_g$ .

К уравнениям движения (13.1) добавляются уравнения неразрывности для каждой фазы, а также уравнения состояния и соотношения, определяющие механизм фазовых переходов в процессе совместной фильтрации и изменение физических свойств флюидов. Наиболее простой моделью, позволяющей достаточно точно описать процесс трехфазной фильтрации, является модель Маскета-Миреса.

### 13.2. Дифференциальные уравнения трехфазной фильтрации.

#### Модель Маскета-Миреса

В основе модели Маскета-Миреса лежит предположение, что углеводородная система состоит из двух фаз: жидкой нефтяной (тяжелые фракции нефти) и газовой. При этом нефтяная фаза не может растворяться в газовой, а газ может находиться как в свободном состоянии, так и быть растворенным в нефти. Растворимостью углеводородных компонентов в воде пренебрегают. Движение считается изотермическим. Капиллярный скачок давления не учитывается.

Растворение газа в нефти подчиняется линейному закону Генри:

$$V_{gp0} = S V_{n0},$$

где  $V_{gp0}$ ,  $V_{n0}$  – соответственно объем растворенного газа и объем нефти при н.у.;  $S$  – коэффициент объемной растворимости газа,  $S = S(P)$ .

Введем понятия объемных коэффициентов нефти и воды:

$$\beta_n = \frac{V_n}{V_{n0}}; \quad \beta_g = \frac{V_g}{V_{g0}}, \quad (13.2)$$

где  $V_n$  и  $V_g$  – соответственно объемы нефти и воды в пластовых условиях.

Из уравнений (13.2) следует:

$$\rho_{n0} = \beta_n \rho_n, \quad \rho_{g0} = \beta_g \rho_g.$$

Уравнение неразрывности для каждой из фаз имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(m \rho_i \sigma_i) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i V_i) = 0. \quad (13.3)$$

С учетом выражений (13.2) и уравнений движения (13.1) для водной и нефтяной фаз имеем:

$$\begin{aligned} \frac{m}{K} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\sigma_n}{\beta_n} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{K_n}{\mu_n \beta_n} \frac{\partial P}{\partial x} \right); \\ \frac{m}{K} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\sigma_g}{\beta_g} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{K_g}{\mu_g \beta_g} \frac{\partial P}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (13.4)$$

где  $K_n = K_n(\sigma_n, \sigma_g)$ ;  $K_g = K_g(\sigma_n, \sigma_g)$ ;  $\beta_n = \beta_n(P)$ ;  $\beta_g = \beta_g(P)$ ;  $\mu_n = \mu_n(P)$ ;  $\mu_g = \mu_g(P)$ .

При составлении уравнения фильтрации для газа необходимо учитывать, что газ движется как в свободном, так и в растворенном состоянии. При этом растворенный газ переносится со скоростью фильтрации нефти  $V_n$ , а его плотность  $\rho_{zp}$  равна:

$$\rho_{zp} = \frac{M_{zp}}{V_n} = \frac{\rho_{z0} V_{zp0}}{\beta_n V_{n0}} = \frac{\rho_{z0} S V_{n0}}{\beta_n V_{n0}} = \frac{\rho_{z0} S}{\beta_n}.$$

Тогда суммарная массовая скорость фильтрации газа  $(\rho_z V_z)_\Sigma$  определится из соотношения:

$$(\rho_z V_z)_\Sigma = \rho_z V_z + \rho_{zp} V_n = \rho_z V_z + \frac{\rho_{z0} S}{\beta_n} V_n. \quad (13.5)$$

Полная масса газообразной среды в единице порового объема:

$$(m \rho_z \sigma_z)_\Sigma = m \rho_z \sigma_z + \frac{m S \sigma_n \rho_{z0}}{\beta_n}. \quad (13.6)$$

В итоге получаем дифференциальное уравнение фильтрации для газообразной фазы:

$$\frac{m}{K} \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_z \sigma_z + \frac{S(P) \rho_{z0} \sigma_n}{\beta_n(P)} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{K_z \rho_z}{\mu_z(P)} + \frac{K_n S(P) \rho_{z0}}{\mu_n(P) \beta_n(P)} \right) \frac{\partial P}{\partial x} \right]. \quad (13.7)$$

Дифференциальные уравнения (13.4) и (13.7) представляют собой замкнутую систему уравнений для определения насыщенностей  $\sigma_n$ ,  $\sigma_g$ ,  $\sigma_e = 1 - \sigma_n - \sigma_g$  и давления  $P$ . Несмотря на принятые упрощения, это сложная система уравнений, нелинейная как по давлению, так и по насыщенности и требующая для своего решения электронно-вычислительных методов.

### 13.3. Фильтрация многокомпонентных смесей с учетом фазовых превращений

В основе модели Маскета-Миреса лежало предположение, что фактическая многокомпонентная смесь состоит из двух частей – жидкой, нерастворимой в газе, и газовой – растворяющейся в жидкости по закону Генри.

На самом деле реальные нефти и газы состоят из многих компонентов. Однако в большинстве случаев с достаточной для практики точностью компонентный состав углеводородной среды можно условно разделить на три-четыре группы.

При движении углеводородной газожидкостной смеси (ГЖС) каждая из фаз – жидкая и газообразная – движется со своей фазовой скоростью:  $V_{ж}$  и  $V_g$ . Каждый компонент может содержаться как в жидкой, так и в газовой фазе. Учитывая это, уравнение неразрывности для  $i$ -го компонента можно записать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{V}_g \rho_g g_i) + \frac{\partial}{\partial x}(\vec{V}_{жс} \rho_{жс} l_i) = -m \frac{\partial}{\partial t}[\rho_g (1 - \sigma) g_i + \rho_{жс} \sigma l_i], \quad (13.8)$$

где  $\rho_g$ ,  $\rho_{жс}$  – плотности газа и жидкости;  $g_i$ ,  $l_i$  – доли  $i$ -го компонента в общей массе газовой и жидкой фаз;  $\sigma$  – насыщенность порового пространства жидкой фазой.

Для  $\rho_g$  и  $\rho_{жс}$  имеем:

$$\rho_g = \rho_g(g_1, g_2, \dots, g_n, P);$$

$$\rho_{жс} = \rho_{жс}(l_1, l_2, \dots, l_n, P).$$

Параметры  $g_i$  и  $l_i$  определяются с помощью фазовых диаграмм.

На рис. 13.3 показана фазовая диаграмма для системы метан  $C_1$  – нормальный бутан  $nC_4$  – декан  $C_{10}$ . Кривые линии на этой диаграмме соответствуют разным давлениям. Они выделяют на диаграмме области двухфазного состояния системы.

На диаграмме также нанесены вспомогательные линии – ноды.

Нодой называют линию на фазовой диаграмме, соединяющую точки, соответствующие компонентным составам сосуществующих фаз – жидкой и газообразной.

Точка пересечения ноды, проходящей через точку, характеризующую общий компонентный состав системы, с частью кривой, расположенной ниже критической точки, соответствует составу жидкой фазы (точка 2).



Точка пересечения ноды с верхней частью кривой соответствует составу газовой фазы (точка 1).

Соотношение жидкой и газовой фаз ( $l_i$  и  $g_i$ ) определяется из соответствующих длин частей ноды по правилу рычага.

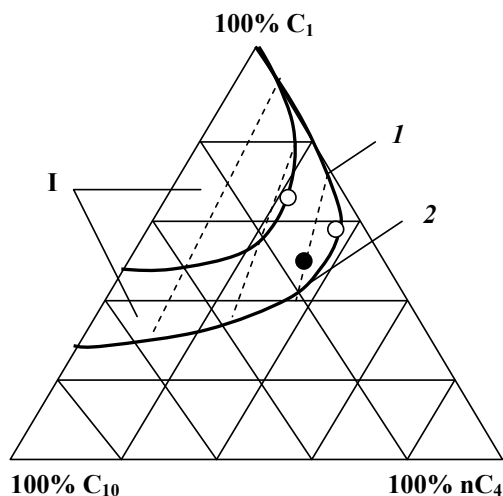


Рис. 13.3. Фазовая диаграмма для системы метан  $C_1$  - нормальный бутан  $nC_4$  - декан  $C_{10}$

- ноды ;
- критические точки ;
- точка, характеризующая общий компонентный состав системы ;
- I область двухфазного состояния при различных давлениях

Фазовое поведение систем, состоящих из воды и углеводородов, значительно отличается от фазового поведения смесей одних углеводородов. Основное различие состоит в том, что жидкие углеводороды, как правило, полностью смешиваются друг с другом. Вода же и углеводороды смешиваются полностью лишь при весьма высоких температурах. Ограниченная растворимость жидкостей – углеводородной и водной – приводит к появлению нескольких новых видов фазовых равновесий:

- газ – углеводородная жидкость (точнее, раствор воды в углеводородах);
- газ – водная жидкость (раствор углеводородов в воде);
- углеводородная жидкость – водная жидкость;
- трехфазное равновесие (газ и две жидкие фазы);
- равновесие газ – газ.

Подробнее о фазовых равновесиях в водоуглеводородных системах см. в книге: *Намиот А.Ю. Фазовые превращения в добыче нефти.* – М.:Недра, 1976. – 183 с.

Если не учитывать растворимость углеводов в воде, то система уравнений для случая совместной линейной фильтрации смеси углеводородных компонентов и воды имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{K_z \rho_z g_i}{\mu_z} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{K_{жс} \rho_{жс} l_i}{\mu_{жс}} \frac{\partial P}{\partial x} \right) = \\ = \frac{m}{K} \frac{\partial}{\partial t} [\rho_z (1 - \sigma_\theta - \sigma_{жс}) g_i + \rho_{жс} \sigma_{жс} l_i]; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{K_\theta}{\mu_\theta \beta_\theta} \frac{\partial P}{\partial x} \right) = \frac{m}{K} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\sigma_\theta}{\beta_\theta} \right). \end{array} \right. \quad (13.9)$$

В данной системе  $\{K_\theta, K_z, K_{жс}\} = f\{\sigma_\theta, \sigma_{жс}, P\}$ ;

$\sigma_\theta$  – насыщенность порового пространства водой;  $\mu_\theta, \beta_\theta$  – вязкость и объемный коэффициент воды;

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 1;$$

$$\mu_z = \mu_z(g_1, g_2, \dots, g_n, P);$$

$$\mu_{жс} = \mu_{жс}(l_1, l_2, \dots, l_n, P).$$

Из фазовых соотношений определяются дополнительные зависимости:

$$\sum_{i=1}^n l_i = 1; \quad \sum_{i=1}^n g_i = 1.$$

При этом

$$l_i = l_i(l_1, l_2, \dots, l_{n-2}, P);$$

$$g_i = g_i(l_1, l_2, \dots, l_{n-2}, P);$$

$$\mu_i = \mu_i(l_1, l_2, \dots, l_{n-2}, P);$$

$$\rho_i = \rho_i(l_1, l_2, \dots, l_{n-2}, P).$$

В случае установившегося движения правые части уравнений (13.9) обращаются в ноль.

Введем в рассмотрение долю  $i$ -го компонента  $\Gamma_i$  в общем потоке:

$$\Gamma_i = \frac{V_z \rho_z g_i + V_{жс} \rho_{жс} l_i}{V_z \rho_z + V_{жс} \rho_{жс}} = \frac{F g_i + l_i}{1 + F},$$

где

$$F = \frac{K_z \rho_z \mu_{жс}}{K_{жс} \rho_{жс} \mu_z}.$$

В случае установившейся фильтрации  $\Gamma_i = \text{const.}$

С помощью параметра  $\Gamma_i$  функции  $l_i$  и  $\sigma$  можно выразить через  $P$  и преобразовать дифференциальное уравнение установившейся фильтрации к виду:

$$\nabla^2 H = 0,$$

где

$$H = \int \left( \frac{K_z \rho_z g_i}{\mu_z} + \frac{K_{ж} \rho_{ж} l_i}{\mu_{ж}} \right) dP \quad - \quad \text{функция Христиановича для смеси углеводородных компонентов.}$$

Иными словами, решение задачи установившегося движения многокомпонентной системы сводится к интегрированию уравнения Лапласа.

### **Контрольные вопросы:**

70. Проанализируйте треугольную диаграмму трехфазного потока в пористой среде.

71. По какому принципу строятся треугольные диаграммы относительных проницаемостей для нефти и газа?

72. Опишите процесс трехфазной фильтрации с помощью модели Маскета-Миреса.

73. Назовите характерные особенности фазового поведения многокомпонентных систем.

74. Как с помощью фазовых диаграмм учитываются особенности фазовых превращений в углеводородах?

75. Проанализируйте уравнения фильтрации для случая совместного движения воды и не растворимой в ней смеси углеводородных компонентов.

## Литература

1. Щелкачев В.Н., Лапук Б.Б. Подземная гидравлика. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». – 2001. – 736 с.
2. Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика: Учебник для вузов. – М.: Недра. - 1993. – 416 с.
3. Подземная гидравлика / К.С.Басниев, А.М.Власов, И.Н.Кочина, В.М.Максимов. – М.: Недра. - 1986. – 303 с.
4. Евдокимова В.А., Кочина И.Н. Сборник задач по подземной гидравлике. – М.: Недра. - 1979. – 169 с.
5. Справочное руководство по проектированию разработки и эксплуатации нефтяных месторождений. Проектирование разработки. Т.1. – М.: Недра. - 1983.
6. Справочное руководство по проектированию разработки и эксплуатации нефтяных месторождений. Добыча нефти. Т.2. – М.: Недра. - 1983.
7. Справочник по добыче нефти / В.В.Андреев, К.Р.Уразаков, В.У.Далимов и др. Под ред. К.Р.Уразакова. – 2000. – 374 с.